

クローバー絡み目のミルナー不変量と edge-homotopy 分類

和田 康載 (東京学芸大学)*

概 要

ミルナー不変量は、絡み目やストリング絡み目の不変量である ([6],[7],[2]).
ここではクローバー絡み目に対して、そのミルナー不変量を定義し、ある仮定の下で well-defined であることを示した. この不変量を用いた応用として、クローバー絡み目の edge-homotopy 分類に関する結果を報告する.

1. クローバー絡み目のミルナー不変量

この節では、本稿の研究対象であるクローバー絡み目を紹介し、そのミルナー不変量を定義する.

1.1. クローバー絡み目の disk/band 曲面から得られるストリング絡み目

図 1.1 のように n 個のループが 1 本の辺によって、一つの頂点に接続されているグラフを C_n とする.

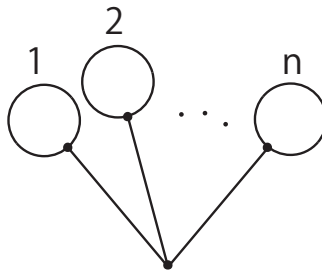


図 1.1: グラフ C_n

定義 1.1 ([5]). グラフ C_n の空間グラフを n 葉クローバー絡み目 c という. また c のループへの制限を **leaves**, ループと頂点を接続する辺への制限を **stems** と呼ぶ.

注 1.2. クローバー絡み目の *stems* は、空間グラフの *ambient isotopies* により、常に交差を持たないとしてよい (図 1.2).

クローバー絡み目が与えられると、次に定義する disk/band 曲面を用いてボトムタングルが構成できる. まず disk/band 曲面の定義を紹介し、その性質を図を用いて説明する. ここでボトムタングルとは、各 $i (= 1, 2, \dots, n)$ に対して、 $\partial A_i = \{(\frac{2i-1}{2n+1}, \frac{1}{2}, 0), (\frac{2i}{2n+1}, \frac{1}{2}, 0)\}$ を満たす n 本の arcs の非交和 $\bigcup_{i=1}^n A_i$ から $I^3 = [0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]$ への埋め込みである.

定義 1.3 ([4]). G を空間グラフとする. コンパクトかつ向き付け可能な S^3 内の曲面で、 G がその曲面の変位レトラクトであるものを G の **disk/band 曲面** と呼ぶ.

* 〒184-8501 東京都小金井市貫井北町 4-1-1 東京学芸大学 大学院教育学研究科
e-mail: m131711m@st.u-gakugei.ac.jp

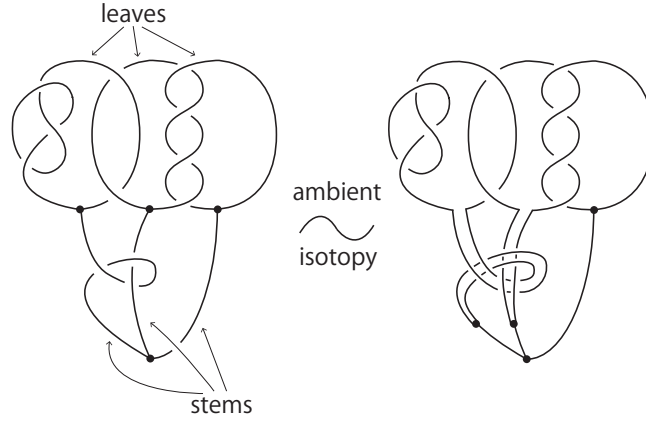


図 1.2: 3葉クローバー絡み目の例

注 1.4. 任意の *disk/band* 曲面は, グラフの各頂点を2次元円板に置き換え, 2次元円板をグラフの辺に沿ってバンドでつなげた向き付け可能な曲面と *ambient isotopic* である. 図1.3は3葉クローバー絡み目 c の *disk/band* 曲面 F_c の例である.

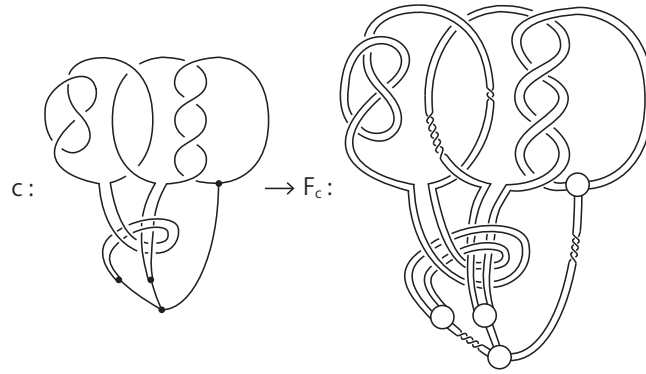


図 1.3: 3葉クローバー絡み目 c の *disk/band* 曲面 F_c の例

注 1.5. 定義より, バンドに有限回の *full-twists* が現れても良いので, 空間グラフの *disk/band* 曲面の取り方は, 一意的ではない.

ここから, クローバー絡み目の *disk/band* 曲面を用いて n 成分ボトムタングルを構成する方法を説明する.

- (1) 順序付けられた有向 n 葉クローバー絡み目 c に対して, まずその *disk/band* 曲面 F_c を考え, グラフ c の leaves と接続される頂点に対応する F_c の2次元円板を D とする. ここで, 以後クローバー絡み目の *disk/band* 曲面を考える場合は, D と leaves に接続する辺との交わりは固定することとする.
- (2) その正則近傍 $N(D)$ を取る. ここで, $N(D)$ は B^3 と同相である.
- (3) S^3 から $N(D)$ を除くと, B^3 内に曲面が張った状況となる. その曲面の境界 $\partial(F_c \setminus N(D))$ は, B^3 内に含まれる n 個の円周 $\bigcup_{i=1}^n S_i^1$ と n 本の arcs の非交和である.

- (4) 最後に $\bigcup_{i=1}^n S_i^1$ を除くと, B^3 は I^3 と同相なので, 順序付けられた有向 n 成分ボトムタングル $\partial(F_c \setminus N(D)) \setminus \bigcup_{i=1}^n S_i^1$ が得られる.

以上の操作によって得られた n 成分ボトムタングル $\partial(F_c \setminus N(D)) \setminus \bigcup_{i=1}^n S_i^1$ を γ_{F_c} と表記し, c の F_c から得られたボトムタングルと呼ぶ (図 1.4).

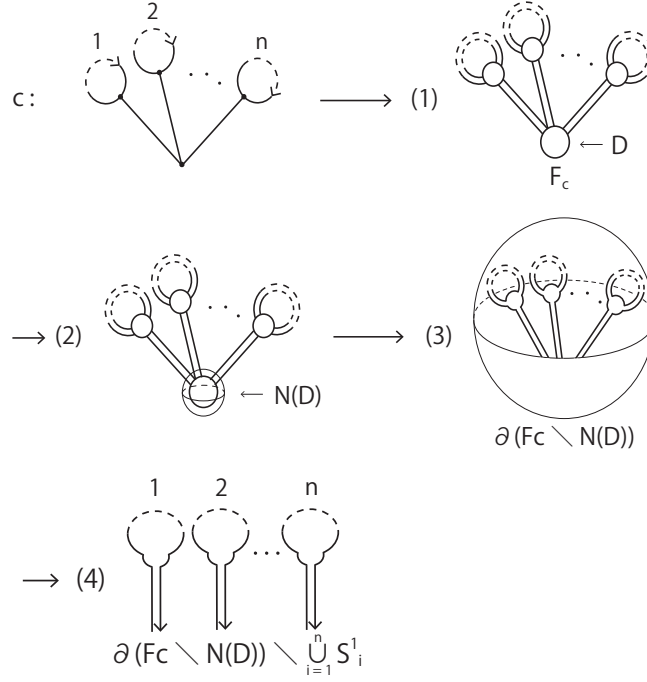


図 1.4: クローバー絡み目の disk/band 曲面から得られるボトムタングル

注 1.6. クローバー絡み目に対して, その任意の *disk/band* 曲面は一意的に定まらないが (注 1.5), *disk/band* 曲面を固定すると得られるボトムタングルは一意的である.

1.2. ミルナー不変量

ここではストリング絡み目と絡み目のミルナー不変量の定義を述べる.

I^3 内の順序付けられた有向 n 成分ストリング絡み目 l に対して, G を $I^3 \setminus l$ の基本群, そして $m_i \in G$ と $\lambda_i \in G$ を各々第 i 番目のメリディアンとロンジチュードとする. また G_q を G の第 q 番目の降中心部分群とする. すなわち, $G_1 = G$, G_q は $\{a^{-1}b^{-1}ab \mid a \in G, b \in G_{q-1}\}$ によって生成される部分群である. この時, 次の定理が知られている.

定理 1.7 ([1], [7], [8]). 商群 G/G_q は, 次の商群と同型である.

$$G/G_q \cong \langle m_1, m_2, \dots, m_n \rangle / \langle m_1, m_2, \dots, m_n \rangle_q$$

ここで $\langle m_1, m_2, \dots, m_n \rangle$ は, $m_1, m_2, \dots, m_n$ によって生成される自由群を表す.

定理1.7より、ストリング絡み目 l の第 i 番目のメリディアン m_i によって与えられる、 n 個の生成元から成る商群 G/G_q の表示を得る。したがって、 $1 \leq i \leq n$ に対して、 l の第 j 成分目のロンジチュード λ_j は、 G_q を法として、 m_i の語で表される。この語を λ_j^q とかく。

次に語 λ_j^q のマグナス展開を行う。マグナス展開とは、次で定義される自由群から整数係数非可換無限冪級数環への準同型写像である。

$$E : \langle m_1, m_2, \dots, m_n \rangle \longrightarrow \mathbb{Z}\langle\langle X_1, X_2, \dots, X_n \rangle\rangle,$$

$$E(m_i) = X_i, \quad E(m_i^{-1}) = 1 - X_i + X_i^2 - X_i^3 + \dots \quad (i = \{1, 2, \dots, n\}).$$

ただし、 $X_1, X_2, \dots, X_n$ は非可換変数である。

定義 1.8. $I = i_1 i_2 \dots i_{k-1} j$ を $\{1, 2, \dots, n\}$ の元を項にもつ数列とし、重複も許すものとする。 $\mu_l(I)$ をマグナス展開 $E(l_j^q)$ における $X_{i_1} \dots X_{i_{k-1}}$ の係数とする。 $(\mu_l(j) = 0$ とする.) この $\mu_l(I)$ をストリング絡み目に対する長さ k の**ミルナー不変量**と呼ぶ。また、 $\hat{l}$ を l を自然に閉じて得られる有向絡み目とする。ストリング絡み目の集合から絡み目の集合への全射は存在するが、単射ではないので $\mu_{\hat{l}}(I)$ は不変量ではない。 $\Delta_{\hat{l}}(I)$ を $\mu_l(J)$ の最大公約数とする。ここで、数列 J とは I から少なくとも1つの項を取り除き、残りを巡回置換して得られる数列のことである。 $\Delta_l(I)$ を法とする $\mu_l(J)$ の剰余類は絡み目の不変量となり、 $\hat{l}$ の**ミルナー不変量** $\bar{\mu}_{\hat{l}}(I)$ と呼ぶ。

注 1.9. ミルナー不変量の計算アルゴリズムはミルナー [7] によって与えられているが、数列の長さが大きくなるにしたがってその計算量も指数関数的に増大する。現在知られている計算ソフトでは、最新のパソコンを用いても長さ16のミルナー不変量の計算が限界である。

注 1.10. ボトムタングル γ とストリング絡み目 l は1対1に対応するので、 γ に対するミルナー不変量 μ_γ は、 l に対するミルナー不変量 μ_l によって自然に定義される。

1.3. クローバー絡み目のミルナー不変量

ここでクローバー絡み目のミルナー不変量を定義する。

定義 1.11. c を順序付けられた有向 n 葉クローバー絡み目、 F_c をその *disk/band* 曲面とする。また γ_{F_c} を F_c から得られる n 成分ボトムタングルとする。この時、数列 I に対して**クローバー絡み目 c のミルナー不変量** $\mu_c(I)$ を γ_{F_c} のミルナー不変量 $\mu_{\gamma_{F_c}}(I)$ で定義する。

注1.5より、クローバー絡み目 c に対するミルナー不変量 $\mu_c(I)$ は c の *disk/band* 曲面 F_c に依存する。一方、次の命題が成り立つことを示した。

命題 1.12. c を順序付けられた有向 n 葉クローバー絡み目、 L_c を c の *leaves* の非交和とする。 F_c と F'_c を c の *disk/band* 曲面とする。 $\gamma_{F_c}, \gamma_{F'_c}$ を F_c, F'_c 各々から得られる n 成分ボトムタングルとする。長さ k 以下の任意の数列 J に対して $\bar{\mu}_{L_c}(J) = 0$ のとき、長さ $2k+1$ 以下の任意の数列 I に対して、 $\mu_{\gamma_{F_c}}(I) = \mu_{\gamma_{F'_c}}(I)$ が成り立つ。

注 1.13. c を順序付けられた有向 n 葉クローバー絡み目、 L_c を c の *leaves* の非交和とする。長さ k 以下の任意の数列 J に対して $\bar{\mu}_{L_c}(J) = 0$ ならば、長さ $2k+1$ 以下の任意の数列 I に対して、 $\mu_c(I)$ は、*well-defined* である。

2. クローバー絡み目のミルナー不変量の well-defined 性の証明

この節では、まず二つの補題 2.1 と 2.2 を紹介し、それらを用いて命題 1.12 を証明する.

補題 2.1. n 葉クローバー絡み目 c に対して、任意の 2 つの *disk/band* 曲面 F_c と F'_c は、*full-twist* と *PB-move* で互いに移り合う. ここで、*PB-move* とは図 2.1 に描かれた *disk/band* 曲面の局所変形である.

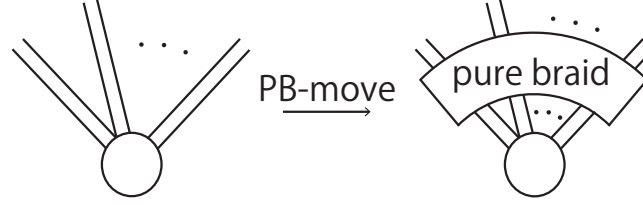


図 2.1:

補題 2.2 を述べるために、 n 成分ボトムタングル γ から、別の n 成分ボトムタングル γ' を得る *SL-move* を導入する.

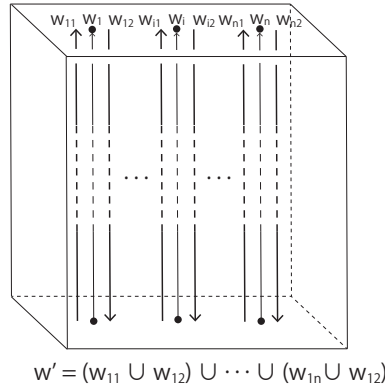


図 2.2:

- (1) $[0, 1] \times [0, 1] \times [-1, 0]$ 内の任意の有向 n 成分ストリング絡み目 $w = w_1 \cup w_2 \cup \dots \cup w_n$ に対し、各成分 w_i と平行かつ向きの異なる図 2.2 に描かれた二本の曲線 w_{i1}, w_{i2} を考える. ただし w_{i1} と w_{i2} の間の有限回の *full-twist* を許し、 $\partial w_{i1} = \{(\frac{2i-1}{2n+1}, \frac{1}{2}, -1), (\frac{2i-1}{2n+1}, \frac{1}{2}, 0)\}$, $\partial w_{i2} = \{(\frac{2i}{2n+1}, \frac{1}{2}, -1), (\frac{2i}{2n+1}, \frac{1}{2}, 0)\}$ を満たすこととする.
- (2) $[0, 1]_1 \times [0, 1]_2 \times [-1, 0]$ 内の $2n$ 本の arcs の集合を $w' = (w_{11} \cup w_{12}) \cup \dots \cup (w_{n1} \cup w_{n2})$ とおく.
- (3) この時 γ と w' の和集合は、 $[0, 1] \times [0, 1] \times [-1, 1]$ 内のボトムタングルとなる.
- (4) 最後に各 $t \in [-1, 1]$ と $(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1]$ に対して、 (x, y, t) を $(x, y, \frac{1}{2}t + \frac{1}{2})$ に移すと、 I^3 内の n 成分ボトムタングル γ' を得る.

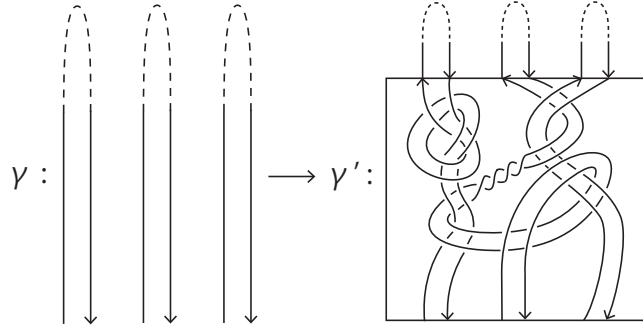


図 2.3: SL-move の例

これら一連の操作を *SL-move* と呼ぶ. *SL-move* は, n 成分ストリング絡み目 w と full-twists の回数によって決定される (図 2.3).

次の補題 2.2 は, [5] に直接言及されている訳ではないが, その中の幾つかの結果を組み合わせ得られる. ただし, ミルナー不変量の計算によって直接この補題 2.2 を証明することも可能である.

補題 2.2 ([5]). γ を n 成分ボトムタングル, γ' を *SL-move* によって γ から得られる n 成分ボトムタングルとする. この時長さ k 以下の任意の数列 J に対して, $\mu_\gamma(J) = \mu_{\gamma'}(J) = 0$ ならば, 長さ $2k+1$ 以下の任意の数列 I に対して, $\mu_\gamma(I) = \mu_{\gamma'}(I)$ が成り立つ.

注 2.3. γ と γ' を次の図 2.4 に描かれた順序付けられた有向 4 成分ボトムタングルとする. 定義より長さ $k=1$ の任意の数列に対して, 常に $\mu_\gamma(j) = \mu_{\gamma'}(j) = 0$ である. よって補題 2.2 より, 長さ $2k+1=3$ 以下の任意の数列 J に対して, $\mu_\gamma(J) = \mu_{\gamma'}(J)$ である. しかしミルナー不変量の計算によって, 長さ $2k+2=4$ の数列 1234 に対して, $\mu_\gamma(1234) = 0 \neq 1 = \mu_{\gamma'}(1234)$ である. すなわち補題 2.2 は, 数列の長さが $2k+2$ 以上の場合には一般に成り立たない.

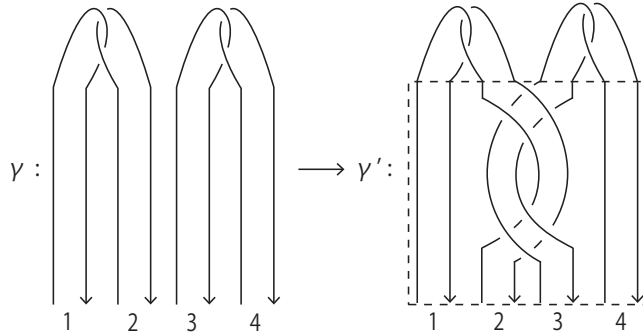


図 2.4:

以上の補題 2.1 と 2.2 を用いて, 命題 1.12 の証明を行う.

証明. n 葉クローバー絡み目 c の任意の 2 つの disk/band 曲面 F_c と F'_c は, 補題 2.1 より, full-twists と PB-move によって互いに移り合う. よって, F_c と F'_c 各々から得られる n 成分ボトムタングル γ_{F_c} と $\gamma_{F'_c}$ は, ST-move によって移り合う. さらに初めて 0 でない値を取る時の絡み目のミルナー不変量は, ストリング絡み目のミルナー不変量と一致

する．したがって，長さ k 以下の任意の数列 J に対して， $\bar{\mu}_{L_c}(J) = \mu_{\gamma_{F_c}} = \mu_{\gamma_{F'_c}} = 0$ である．以上より， γ_{F_c} と $\gamma_{F'_c}$ は，補題 2.2 の仮定を満たすので，長さ $2k+1$ 以下の任意の数列 I に対して， $\mu_{\gamma_{F_c}}(I) = \mu_{\gamma_{F'_c}}(I)$ が成り立つ． $\square$

3. 主定理

この節では，定義したクローバー絡み目のミルナー不変量を用いた応用として得られたクローバー絡み目の分類定理を紹介する．その主定理を述べるために，まず幾つか定義を説明する．

定義 3.1. c と c' を n 葉クローバー絡み目とする． c と c' が **edge-homotopic** であるとは， c と c' は，自己交差交換と *ambient isotopies* によって互いに移り合うことである．ここで，自己交差交換とは，同じ辺の交差交換である．

定義 3.2 ([3]). c と c' を n 葉クローバー絡み目とする． c と c' が **C_k 同値** であるとは， c と c' は， C_k -moves によって互いに移り合うことである．ここで， C_k -move とは，次の図 3.1 で定義される局所変形である．

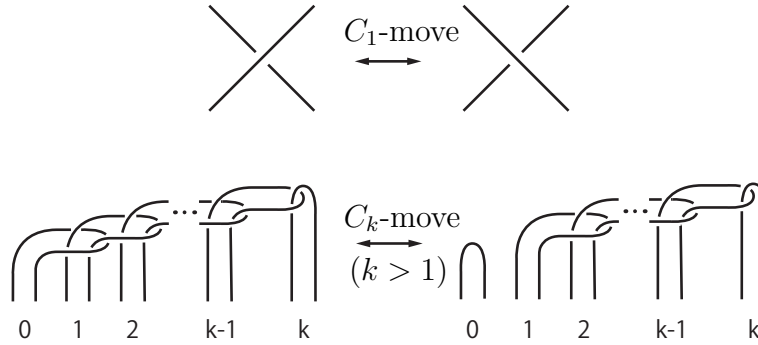


図 3.1:

定義 3.3. c と c' を n 葉クローバー絡み目とする． c と c' が **(edge-homotopy + C_k) 同値** であるとは， c と c' は，*edge-homotopies* と C_k -moves で互いに移り合うことである．

準備が整ったので，主定理を述べる．

定理 3.4. c と c' を順序付けられた有向 n 葉クローバー絡み目， L_c と $L_{c'}$ を各々 c と c' の *leaves* の非交和とする．長さ k 以下の任意の数列 J に対して， $\bar{\mu}_{L_c}(J) = \bar{\mu}_{L_{c'}}(J) = 0$ のとき， c と c' が **(edge-homotopy + C_{2k+1}) 同値** である必要十分条件は，長さ $2k+1$ 以下の繰り返しのない任意の数列 I に対して， $\mu_c(I) = \mu_{c'}(I)$ が成り立つことである．

C_k 同値の性質として，次の事実が知られている．

注 3.5. n が $2k+1$ 以下のとき， c と c' が **(edge-homotopy + C_{2k+1}) 同値** ならば， c と c' は *edge-homotopic* である．

したがって，この注 3.5 から次の系を得ることが出来る．

系 3.6. c と c' を n 葉クローバー絡み目， L_c と $L_{c'}$ をそれぞれ c と c' の *leaves* の非交和とする．長さ $\frac{n}{2}$ 以下の任意の数列 J に対して， $\bar{\mu}_{L_c}(J) = \bar{\mu}_{L_{c'}}(J) = 0$ のとき， c と c' が *edge-homotopic* である必要十分条件は，長さ n 以下の繰り返しのない任意の数列 I に対して， $\mu_c(I) = \mu_{c'}(I)$ が成り立つことである．

注 3.7. この系 3.6 は、クローバー絡み目の仮定付き *edge-homotopy* 分類を与えている。ただし $n = 3$ のとき、定義より長さ 1 のミルナー不変量は常に 0 なので仮定を必要としない。すなわち c と c' が *edge-homotopic* である必要十分条件は、長さ 3 以下の繰り返しのない任意の数列 I に対して、 $\mu_c(I) = \mu_{c'}(I)$ である。これは、3 葉クローバー絡み目の *edge-homotopy* 分類を解決している。また $n = 4, 5$ のとき、長さ 2 以下の任意の数列 J に対して、 $\bar{\mu}_{L_c}(J) = \bar{\mu}_{L_{c'}}(J) = 0$ であるという仮定が必要になる。しかし長さ 2 のミルナー不変量は絡み数なので、計算が非常に簡単な仮定となっている。したがって、 $n = 4, 5$ のときも容易に *edge-homotopy* 分類を考えることが出来る。

注 3.8. c と c' を図 3.2 に描かれた 2 つの順序付けられた有向 n 葉クローバー絡み目とする。 L_c と $L_{c'}$ を c と c' それぞれの *leaves* の非交和とする。このとき $L_c = L_{c'}$ なので、これらは互いに *link-homotopic* である。しかし、長さ 3 の数列 123 に対して、 $\mu_c(123) = 1 \neq 0 = \mu_{c'}(123)$ なので、系 3.6 より、 c と c' は *edge-homotopic* ではない。

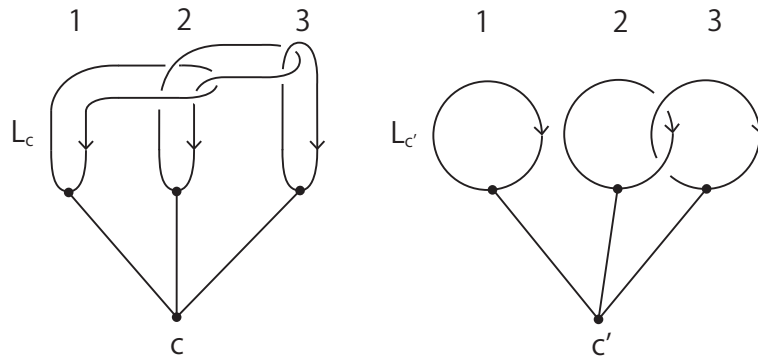


図 3.2:

参考文献

- [1] K. T. Chen, *Commutator calculus and link invariants*. Proc. Amer. Math. Soc. 3, (1952). 44-55.
- [2] N. Habegger; X. S. Lin, *The classification of links up to link-homotopy*, J. Amer. Math. Soc. 3 (1990), no. 2, 389-419.
- [3] K. Habiro, *Claspers and finite type invariants of links*, Geom. Topol. 4 (2000), 1-83 (electronic).
- [4] L. Kauffman; J. Simon; K. Wolcott; P. Zhao, *Invariants of theta-curves and other graphs in 3-space*, Topology Appl. 49 (1993), no. 3, 193-216.
- [5] J. P. Levine, *The $\bar{\mu}$ -invariants of based links*. Differential topology (Siegen, 1987), 87-103, Lecture Notes in Math., 1350, Springer, Berlin, (1988).
- [6] J. Milnor, *Link groups*, Ann. of Math. (2) 59, (1954). 177-195.
- [7] J. Milnor, *Isotopy of links*. Algebraic geometry and topology. A symposium in honor of S. Lefschetz, pp. 280-306. Princeton University Press, Princeton, N. J., (1957).
- [8] J. Stallings, *Homology and central series of groups*. J. Algebra 2 (1965) 170-181.