On a branched $\mathbb{Z}_p$-cover of $\mathbb{Q}$-homology 3-spheres

植木 潤　九州大学大学院数理学府

Abstract

本研究は代数体と 3 次元多様体、素数と結び目の類似を体系的に研究することを目的とする「数論的位相幾何学」に属する。本稿では、まず代数体の $\mathbb{Z}_p$ 拡大の類似物として有理ホモロジー球面の分岐 $\mathbb{Z}_p$-cover を定義し、岩澤類数公式の類似の拡張を述べ、並行な純群論的証明を見る。また演習問題として周期的結び目についての古典的結果の帰結とその類似を考える。次に補空間の基本群から $\mathbb{Z}_p$ への全射準同型を $\mathrm{GL}_1(\mathbb{F}_p)$ への自明表現の変形と看做せることを確認し、普遍変形と Alexander 多項式の関係を復習する。最後に結び目群の $\mathrm{SL}_2(k)$ 表現の普遍変形の理論に簡単に触れる。

1 Introduction

数論と低次元トポロジーの類似の体系的研究を Arithmetic Topology と呼ばれ、Mazur-Kapranov-Reznikov + 森下 の「辞書」がある（[Rez97] [Rez00], [Mor12]）:

代数体 k（整数環の $\mathrm{Spec}\,\mathcal{O}_k$）	有向連結三次元多様体 M（$\mathbb{Q}\mathrm{HS}^3$）
素イデアル $\mathfrak{p}$（$\mathrm{Spec}\,\mathbb{F}_{\mathfrak{p}} \hookrightarrow \mathrm{Spec}\,\mathcal{O}_k$）	結び目 $K : S^1 \hookrightarrow M$
族 $S = \{\mathfrak{p}_1, ..., \mathfrak{p}_s\}$	絡み目 $L : \sqcup S^1 \hookrightarrow M$
体の（不分岐, 分岐）拡大 F/k	多様体の（ , 分岐）被覆 $h : N \to M$
étale 基本群 $\pi_1(\mathrm{Spec}\,O_k)$	基本群 $\pi_1(\mathrm{Spec}\,O_k)$
イデアル類群 $Cl_k = I_k/P_k$	$H_1(M) = Z_1(M)/B_1(M)$
fact. $\#Cl_k < \infty$	suppose $\#H_1(M) < \infty$ ($\underset{\text{iff}}{\Longleftrightarrow}$ M: $\mathbb{Q}\mathrm{HS}^3$)
Artin $\pi_1(\mathrm{Spec}\,O_k)^{\mathrm{ab}} \cong Cl_k \cong \mathrm{Gal}(k^{ur}_{ab}/k)$	Hurwicz $\pi_1(M)^{\mathrm{ab}} \cong H_1(M) \cong \mathrm{Gal}(M_{ab}/M)$
分岐条件付きガロア理論	分岐被覆空間の理論, [Mor12],[Uek14]
イデール類体論	[Nii14], [NU]
岩澤理論	Alexander-Fox 理論
$\mathbb{Z}_p$ 拡大 k_∞/k, 岩澤多項式	$\mathbb{Z}$ 被覆 $X_\infty \to X$, Alexander 多項式
肥田-Mazur 理論	[MT07], [MTTU]

岩澤理論と Alexander-Fox 理論がよく似ていることは昔から知られていたが（[Maz64])、精密化の試みとして、近年 [HMM06], [KM08], [KM13], [Uek] などがある。その拡張を次節で述べる。次に岩澤理論が GL_1 表現の理論と見れることを説明し、SL_2 版へのアプローチを最後に述べる。

注意

本稿では p を固定された素数とし、$\mathbb{Z}_p$ と書いたら p 進整数環を表す。すなわち $\mathbb{Z}_p := \varprojlim \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z} = \{\sum_{n=0}^{\infty} a_n p^n \,|\, 0 \leq a_n < p\}$、これは $\mathbb{Z}$ の p 進完備化である。

2　岩澤類数公式とその類似

岩澤類数公式の類似は [HMM06], [KM08] で $M = S^3, \mathbb{Q}\text{-HS}^3$ 上の分岐 $\mathbb{Z}$-cover に対してそれぞれ示された。後者は [Sak79] の単完全列に依拠していたが、新しい岩澤理論の教科書である落合理「岩澤理論とその展望（上）」([Och14]) に見通しのよい記述があり、その真似をすると、並行な純 Galois 理論的な議論のみによって、一般の $\mathbb{Z}_p$-cover の場合に拡張できる。他方で、[KM08] の方法を直接拡張すると、詳しいことが言える。

2.1　コンパクト Λ 加群の補題

$\mathbb{Z}_p$ の加法群と同型な群 $\Gamma = \overline{\langle t \rangle}$ に対し、完備群環 $\Lambda := \mathbb{Z}_p[[\Gamma]] = \mathbb{Z}_p[[T]]; (t = 1 + T)$ を考える。コンパクト Λ 加群の構造定理がある。

Proposition 2.1（[Was97](Lemma 13.16 and Theorem 13.12)）　$\mathcal{X}$ がコンパクト Λ 加群のとき、
(1) $\mathcal{X}$ は Λ 加群として有限生成 $\underset{\text{iff}}{\Longleftrightarrow}$ $\mathcal{X}/(p, T)$ が有限群
(2) $\mathcal{X}$ が Λ 加群として有限生成のとき、一意な標準型との擬同型がある：

$$\mathcal{X} \sim \Lambda^{\oplus r} \oplus \oplus_i \Lambda/(f_i^{e_i}) \oplus \oplus_j \Lambda/(p^{m_j}),$$

$r, e_i, m_k \in \mathbb{Z},\ f_i \in \mathbb{Z}_p[T]$ は既約 distinguished 多項式（monic かつ他の係数が $\in p\mathbb{Z}_p$）。

ここに擬同型とは $\mathrm{Ker}, \mathrm{Coker}$ が有限な準同型のことである。このことから、次が言える。

Proposition 2.2　$\mathcal{X}$ を有限生成トーション Λ 加群とする。このとき
(1) $\mathcal{X}/(t^{p^n} - 1)$ が有限群 $\underset{\text{iff}}{\Longleftrightarrow}$ 特性イデアル $\mathrm{char}_\Lambda(E)$ と $(t^{p^n} - 1)$ が共通因子を持たない。
(2) (1) の条件下で、ある整数 $\lambda, \mu \geq 0$ と ν があって十分大きな任意の n に対して

$$\#(\mathcal{X}/(t^{p^n} - 1)) = p^{\lambda n + \mu p^n + \nu}.$$

(3) 多項式 $f(t-1)$ がある n_0 に対し $t^{p^{n_0}} - 1$ を割り切る時、(2) の左辺の分母を $(\frac{t^{p^n}-1}{f(t-1)})$ に置き換えたものも成り立つ。

2.2　$\mathbb{Z}_p$ 拡大と岩澤類数公式

Theorem 2.3（岩澤類数公式）　$k/\mathbb{Q}$ を有限次拡大、k_∞/k を $\mathbb{Z}_p$ 拡大とし、p^n 次の部分拡大を k_n/k とかく。このとき、ある λ, μ, ν があって、$n \gg 0$ に対して

$$\#Cl(k_n)_{(p)} = p^{\lambda n + \mu p^n + \nu}.$$

k_n の最大不分岐 p 拡大を $\widetilde{k_n}$ とすると、類体論より $Cl(k_n)_{(p)} \cong \mathrm{Gal}(\widetilde{k_n}/k_n)$ であり、$\widetilde{k_n}/k$ は $\widetilde{k_n}$ の最大性からガロアとなる。【注意、このことは純群論的に言えている。】また、$\widetilde{k_\infty} := \cup \widetilde{k_n}$ とすると $\widetilde{k_\infty}/k$ もその最大性よりガロアとなる。$\Gamma := \mathrm{Gal}(k_\infty/k) = \overline{\langle t \rangle} \cong \mathbb{Z}_p$ は $\mathcal{X} = \varprojlim Cl(k_n)_{(p)} \cong \mathrm{Gal}(\widetilde{k_\infty}/k_\infty)$ への共役による自然な連続作用を持ち、$\mathcal{X}$ は Λ 加群となる。

Proposition 2.4　$\mathbb{Z}_p$ 拡大 k_∞/k を考える。(1) k_∞/k の分岐素点が唯一であり、かつそこで完全分岐なとき、$Cl(k_n)_{(p)} \cong \mathcal{X}/(t^{p^n} - 1)$ である。

(2) k_∞/k が s 個の素点でのみ分岐し、かつそこで完全分岐のとき、ある $\mathcal{X}$ の指数有限部分 Λ 加群 $\mathcal{Y}$ について、$Cl(k_n)_{(p)} \cong \mathcal{X}/(\frac{t^{p^n}-1}{t-1})\mathcal{Y}$ である。

定理の証明. $Cl(k_n)$ は有限群なので補題から $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ は有限生成トーション Λ 加群となり、補題から類数公式が従う。また任意の $\mathbb{Z}_p$ 拡大 k_∞/k についても、十分大きな n_0 を取ると k_∞/k_{n_0} は有限個の素点で分岐、かつ全ての分岐素点で完全分岐な $\mathbb{Z}_p$ 拡大となり、上のケースに帰着される。□

命題の証明. $G_n = \mathrm{Gal}(\widetilde{k_\infty}/\widetilde{k_n})$ とおく。同型 $(t^{p^n}-1)\mathcal{X} \cong \overline{[G_n, G_n]}$ $\cdots$☆ がある。実際、左辺による $\widetilde{k_\infty}/k_n$ の固定体 $\widetilde{k_n}'$ は、t^{p^n} のアーベル群 $\mathrm{Gal}(\widetilde{k_n}'/k\infty)$ への共役作用が自明となるような最大の $\widetilde{k_n}'$ であり、これは k_n 上アーベルな最大の中間体であり、右辺の固定体に一致する。(【注意】ここは本当は純群論的な議論である。) $\Gamma_n = \overline{\langle t^{p^n}\rangle}$ と $\mathcal{X}$ がアーベルで、$G_n/\mathcal{X} = \Gamma_n$ なので、$\overline{[G_n, G_n]}$ は $(t^{p^n}-1)x = \tilde{t}^{p^n} x \tilde{t}^{-p^n} x^{-1} = [\tilde{t}^{p^n}, x], (x \in \mathcal{X})$ たちが位相的に生成する。($\tilde{t}$ は t の G_n へのリフト。) 一方 $(t^{p^n}-1)\mathcal{X}$ は compact Hausdorff 空間の間の連続写像の像ゆえ閉である。

(1) 分岐素点 $\mathfrak{p}$ が唯一つの時、その惰性群 $I_n < G_n < \mathrm{Gal}(\widetilde{k_\infty}/k)$ について、$\widetilde{k_\infty}/k_\infty$ が不分岐で k_∞/k が完全分岐ゆえ $I_n \cap \mathcal{X} = 1$, $G_n \cong I_n \ltimes \mathcal{X}$ であり、$Cl(k_n)_{(p)} \cong \mathrm{Gal}(\widetilde{k_n}/k_n) \cong G_n/I_n\overline{[G_n, G_n]} \cong I_n\mathcal{X}/I_n(t^{p^n}-1)\mathcal{X} \cong \mathcal{X}/(t^{p^n}-1)\mathcal{X}$ となる。□

(2) 次に、分岐素点が複数あり、かつそこで完全分岐な時ときを考える。k_∞/k の分岐素点を $\mathfrak{p}_1, ..., \mathfrak{p}_s$ とする。各 $\mathfrak{p}_i$ の惰性群は $I_i < \mathrm{Gal}(\widetilde{k_\infty}/k) \twoheadrightarrow \mathrm{Gal}(k_\infty/k) \cong \mathbb{Z}_p$ により $\mathbb{Z}_p$ と同型。これによる t の逆像を t_i と書く。$\mathcal{Y} = \overline{\langle (t-1)\mathcal{X}, t_2t_1^{-1}, ..., t_st_1^{-1}\rangle} < \mathrm{Gal}(\widetilde{k_\infty}/k)$ と置く。これは $\mathcal{X}$ の指数有限部分群で、$Cl(k_n)_{(p)} \cong \mathcal{X}/(\frac{t^{p^n}-1}{t-1})\mathcal{Y}$ となる。

実際、☆より $\mathcal{X}/(t^{p^n}-1) \cong \mathrm{Gal}(\widetilde{k_\infty}/k_n)^{\mathrm{ab}}$ である。$\mathrm{Gal}(\widetilde{k_n}/k_n)$ はこれを惰性部分群 I_i たちが正規に生成する群で割った商であり、I_i たちは $t_i^{p^n} \in \mathrm{Gal}(\widetilde{k_\infty}/k)$ たちが生成する。よって

$Cl(k_n)_{(p)} \cong \mathrm{Gal}(\widetilde{k_n}/k_n) \cong (\mathcal{X}/(t^{p^n}-1)\mathcal{X})/\overline{\langle t_1^{p^n}, ..., t_s^{p^n}\rangle} \cap \mathcal{X}$ の像

$\cong \mathcal{X}/(\overline{\langle (t^{p^n}-1)\mathcal{X}, t_1^{p^n}, ..., t_s^{p^n}\rangle} \cap \mathcal{X}) = \mathcal{X}/\overline{\langle (t^{p^n}-1)\mathcal{X}, t_2^{p^n}t_1^{-p^n}, ..., t_s^{p^n}t_1^{-p^n}\rangle}$.

ここで、$t_j^n = (t_jt_1^{-1})(t_1t_jt_1^{-1}t_1^{-1})(t_1^2t_jt_1^{-1}t_1^{-2})...(t_1^{n-1}t_jt_1^{-1}t_1^{-(n-1)})t_1^n$ なので、共役作用 $\overline{\langle t\rangle} \curvearrowright \mathcal{X}$ ($x \in \mathcal{X}$ に対し $x^t = t_1xt_1^{-1}$) を用いて $t_j^{p^n}t_1^{-p^n} = (t_jt_1^{-1})^{1+t+...+t^{p^n-1}}$、よって

分母 $= (\frac{t^{p^n}-1}{t-1})\overline{\langle (1-t)\mathcal{X}, t_2t_1^{-1}, ..., t_st_1^{-1}\rangle} = (\frac{t^{p^n}-1}{t-1})\mathcal{Y}$. □

2.3 分岐 $\mathbb{Z}_p$ 被覆

ここでも、各 p^n 番目の対象を A_n のように書く。($M_n \to M$ で p^n 次被覆を表す。)

Definition 2.5 有限リンク L で分岐する（$\mathbb{Q}\mathrm{HS}^3$ の）p^n 次巡回分岐被覆の族 $\{h_n : M_n \to M\}$ が射影系をなすとき、これを（$\mathbb{Q}\mathrm{HS}^3$ の）分岐 $\mathbb{Z}_p$ 被覆と呼ぶ。

言い換えると、各 h_n が h_{n+1} の部分分岐被覆となっている。これは補空間 $X := M \setminus L$ の基本群の p 進完備化から $\mathbb{Z}_p$ への全射 $\widehat{\tau} : \widehat{\pi}_1(X) \twoheadrightarrow \mathbb{Z}_p$ と同型を除き一対一に対応する。

Example 2.6 $L = K_1 \cup K_2$ を二成分リンクとし、K_i のメリディアンを $\mu_i \in H_1(X)$ と書く。$p \equiv 1 \bmod 4$ のとき $\sqrt{-1} \in \mathbb{Z}_p$ である。$\tau : \mu_1, \mu_2 \mapsto 1, \sqrt{-1}$ が定める射に対応する分岐 $\mathbb{Z}_p$ 被覆は、X のひとつの $\mathbb{Z}$ 被覆の部分列として実現されないものである。

Theorem 2.7 **(岩澤型公式 (U.))**　一般に $\mathbb{Q}\mathrm{HS}^3$ の分岐 $\mathbb{Z}_p$ 被覆に対し、ある定数 λ, μ, ν があって

$$\#H_1(M_n)_{(p)} = p^{\lambda n + \mu p^n + \nu}, (n \gg 0).$$

各 n に対し $\widetilde{M_n} \to M_n$ を最大不分岐アーベル p 被覆とすると、$\mathcal{X}_n := H_1(M_n)_{(p)} \cong \mathrm{Gal}(\widetilde{M_n}/M_n)$ は自然に射影系をなす。$\mathcal{X} := \varprojlim \mathcal{X}_n$ とする。(数論と並行に見るため、$\mathcal{X}_n, \mathcal{X}$ の演算は乗法的に書くことにする。)合成 $\widetilde{M_n} \to M$ は M_n の最大性からガロアである。$\Gamma_n := \mathrm{Gal}(M_n \to M) \cong \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$, $\Gamma := \varprojlim \Gamma_n \cong \mathbb{Z}_p$ とし、Γ の位相的生成元 t を取る。Γ は $\mathcal{X}$ への共役による自然な連続作用を持つ。

Proposition 2.8　$M_\infty \to M$ の分岐成分 L について
(1) L が結び目で、かつそこで完全分岐の時 $H_1(M_n)_{(p)} \cong \mathcal{X}/(t^{p^n}-1)\mathcal{X}$ が成り立つ。
(2) 一般に絡み目 L で完全分岐のとき、$\mathcal{X}$ のある指数有限部分 Λ 加群 $\mathcal{Y}$ があって $H_1(M_n)_{(p)} \cong \mathcal{X}/(\frac{t^{p^n}-1}{t-1})\mathcal{Y}$ が成り立つ。

定理の証明. 適当に番号をズラして、全ての分岐成分で完全分岐としてよい。上の命題が示されれば、Λ 加群の補題から定理が従う。□

命題の証明. $G_{n,N} := \mathrm{Gal}(\widetilde{M_N} \to M_n), G_n := \varprojlim_N G_{n,N}$ について、$(t^{p^n}-1)\mathcal{X} = \overline{[G_n, G_n]}$ ⋯☆である。実際、$G_n/\mathcal{X} = \Gamma_n$ であり、$\Gamma_n = \overline{\langle t^{p^n} \rangle}$ と X がアーベルなので、$\overline{[G_n, G_n]}$ は $(t^{p^n}-1)x = \widetilde{t}^{p^n} x \widetilde{t}^{-p^n} x^{-1} = [\widetilde{t}^{p^n}, x], (x \in \mathcal{X})$ たちが位相的に生成する。一方、$(t^{p^n}-1)\mathcal{X}$ は compact Hasudorff 空間の間の連続写像の像ゆえ閉である。

(1) 分岐成分が一つで、そこで完全分岐の時、惰性群 $I_n < G_n < G_1$ について、$I_n \cap \mathcal{X} = 1$, $G_n \cong I_n \ltimes \mathcal{X}$ であり、$H_1(M_n)_{(p)} \cong \mathrm{Gal}(\widetilde{M_n}/M_n) \cong G_n/I_n\overline{[G_n, G_n]} \cong I_n\mathcal{X}/I_n(t^{p^n}-1)\mathcal{X} \cong \mathcal{X}/(t^{p^n}-1)\mathcal{X}$ となる。□

(2) 分岐成分が複数あり、そこで完全分岐の時、分岐リンクを $K_1 \sqcup ... \sqcup K_s$ とする。各 K_i の惰性群は $I_i < G_1 \twoheadrightarrow \Gamma \cong \mathbb{Z}_p$ により $\mathbb{Z}_p$ と同型。これによる t の逆像を t_i と書く。$\mathcal{Y} = \overline{\langle (t-1)\mathcal{X}, t_2 t_1^{-1}, ..., t_s t_1^{-1} \rangle} < G_1$ と置くと、$H_1(M_n)_{(p)} \cong \mathcal{X}/(\frac{t^{p^n}-1}{t-1})\mathcal{Y}$ となる。

実際、先ほどの☆より $\mathcal{X}/(t^{p^n}-1) \cong G_n^{\mathrm{ab}}$ であるが、$\mathrm{Gal}(\widetilde{M_n}/M_n)$ はこれを惰性部分群たちが正規に生成する群で割った商であり、惰性部分群たちは $t_i^{p^n} \in G_1$ たちが生成する。よって

$H_1(M_n)_{(p)} \cong \mathrm{Gal}(\widetilde{M_n}/M_n) \cong (\mathcal{X}/(t^{p^n}-1)\mathcal{X})/\overline{\langle t_1^{p^n}, ..., t_s^{p^n} \rangle} \cap \mathcal{X}$ の像

$\cong \mathcal{X}/(\overline{\langle (t^{p^n}-1)\mathcal{X}, t_1^{p^n}, ..., t_s^{p^n} \rangle} \cap \mathcal{X}) = \mathcal{X}/\overline{\langle (t^{p^n}-1)\mathcal{X}, t_2^{p^n} t_1^{-p^n}, ..., t_s^{p^n} t_1^{-p^n} \rangle}$.

ここで $t_j^n = (t_j t_1^{-1})(t_1 t_j t_1^{-1} t_1^{-1})(t_1^2 t_j t_1^{-1} t_1^{-2}) ... (t_1^{n-1} t_j t_1^{-1} t_1^{-(n-1)}) t_1^n$ なので、共役作用 $\overline{\langle t \rangle} \curvearrowright \mathcal{X}$ ($x \in \mathcal{X}$ に対し $tx = x^t = t_1 x t_1^{-1}$) を用いて $t_j^{p^n} t_1^{-p^n} = (t_j t_1^{-1})^{1+t+...+t^{p^n-1}}$、よって

分母 $= (\frac{t^{p^n}-1}{t-1})\overline{\langle (1-t)\mathcal{X}, t_2 t_1^{-1}, ..., t_s t_1^{-1} \rangle} = (\frac{t^{p^n}-1}{t-1})\mathcal{Y}$. □

2.4　特性イデアルについて

結び目 K_i が分岐 $\mathbb{Z}_p$ 被覆で完全分岐可能 $\underset{\mathrm{iff}}{\iff}$ $[K_i] = 0$ in $H_1(M)_{(p)}$ である。分岐成分で完全分岐な一般の $\mathbb{Z}_p$ 被覆に対して、$\mathcal{X}$ の特性イデアル $= (\Delta_1(t))$ と書くと、Λ 加群の補題から次の判定条件が従う: $\Delta_1(t)$ が円分多項式を割らない $\underset{\mathrm{iff}}{\iff}$ $\forall n, \#H_1(M_n) < \infty$ i.e., M_n が $\mathbb{Q}\mathrm{HS}^3$。

特に $L = \cup K_i$ について $\forall [K_i] = 0$ in $H_1(M)$ のとき、$\tau : \forall \mu_i \mapsto 1$ によって「TLN 被覆」が定義される。このとき $\Delta_1(t)$ は Alexander 多項式（L が 2 成分以上の時は、reduced Alexander 多項式 $\times(t-1)$）となり、[KM08] の判定条件を得る。

分岐 $\mathbb{Z}_p$ 被覆の定義準同型 τ がトーションを 0 に送ることに気をつけると、各 N に対して $n \le N$ の部分はいつもある $\mathbb{Z}$ 分岐被覆の部分被覆として得られる。すると岩澤型公式の拡張は [KM08] の結果から直接従う。また分岐成分が完全分岐の時、[Sak79] の短完全列の修正版

$$0 \to H_1(M) \to H_1(M_n) \to \mathcal{X}/\nu_{p^n}\mathcal{X} \to 0,$$

$\nu_n := \sum_{0 \le i < i} t^i$ も得られる。これと [Hil12] Theorem 3.13 より次の類似定理 ([KM08]) の拡張が得られる。

Theorem 2.9（(U.)）　完全分岐な分岐 $\mathbb{Z}_p$ 被覆の $\mathcal{X}$ の特性イデアルの生成元 $\Delta_1(t)$ について、
$$\frac{|H_1(M_n)_{(p)}|}{\# H_1(M)_{(p)}} = |\prod_{\zeta^{p^n}=1} \Delta_1(\zeta)|_{(p)}.$$

Theorem 2.10（[Was97]）　技術的な仮定の下、$\mathbb{Z}_p$ 拡大 k_∞/k の岩澤多項式 $\Delta_1(t)$ について、
$$\frac{|Cl(k_n)_{(p)}|}{\# Cl(k)_{(p)}} = |\prod_{\zeta^{p^n}=1} \Delta_1(\zeta)|_{(p)}.$$
普段のパラメータとの関係 $t = 1 + T$ に注意。

ここに $|A|$ は A が有限群なら $\# A$、無限群なら 0 とする。番号をずらせば完全分岐の条件は外せる。後者は $k = \mathbb{Q}(\zeta_p)$, $k_\infty = \mathbb{Q}(\zeta_{p^\infty})$ で $p \nmid \# Cl(\mathbb{Q}(\zeta_p + \zeta_p^{-1}))$ ならば成り立つ。

Exercise 2.11（periodic knot and prime?）　結び目 $K \subset S^3$ の巡回分岐 $\mathbb{Z}$ 被覆 $M_\infty \to S^3$ を取り、その r 次部分分岐被覆 $M_r \to S^3$ の族を考える。次の古典的結果の帰結とその類似は何か。

Theorem 2.12（periodic knot [Gor72]）　次は同値である。
(i) $H_1(M_r) \cong H_1(M_{r+m}), \forall r$（つまり m が周期）(ii) $\lambda_1(t) := \Delta_1(t)/\Delta_2(t)$ が $t^m - 1$ を割る。

ここに $\Delta_i(t)$ はアレクサンダー（岩澤）加群の i-th elementary ($(i-1)$-th Fitting) ideal。

$\Delta_1(t)$ が円分多項式を因数に持たないことが $\forall \# H_1(M_r) < \infty$ なる条件だったので、岩澤不変量については $\lambda = \mu = 0 \underset{\text{iff}}{\iff} \Delta_1(t)/\Delta_2(t) \doteq 1$ を主張するのみである。これは数体の場合にも、Fitting イデアルを思い出すと、$\lambda = \mu = 0 \underset{\text{iff}}{\iff} \mathcal{X} \sim 0 \underset{\text{iff}}{\iff} \Delta_1(t)/\Delta_2(t) \doteq 1$ という同値性があるので、自明に成り立っている。

3　$\mathrm{GL}_1(\mathbb{F}_p)$ 自明表現のリフトとしての $\mathbb{Z}_p$ 表現と普遍変形

ここでは、結び目版の岩澤理論を「GL_1 表現の変形理論」の観点から概観したい。

$\mathbb{Z}_p$ の単数は $\bmod p$ で 0 でない数の全体であり、$\mathbb{Z}_p^* \cong \mathbb{Z}/(p-1) \times \mathbb{Z}_p$ が知られている。とくに $u \equiv 1 \bmod p$ なる単数の全体は $1 + p\mathbb{Z}$ であるが、その乗法群からの non canonical な同型 $1 + p\mathbb{Z}_p \cong \mathbb{Z}_p; 1 + p \longleftrightarrow 1$ がある。今まで群 $\pi_1(X)$ から $\mathbb{Z}_p$ への射 τ を考えてきたが、この同型を使って、$1 + p\mathbb{Z}_p \subset \mathrm{GL}_1(\mathbb{Z}_p)$ への射と思う、というのがここでのポイントである。

R を完備局所 $\mathbb{Z}_p$ 加群とする。その極大イデアルを $\mathfrak{m}_R$ と書き、$R/\mathfrak{m}_R \cong \mathbb{F}_p$ を仮定する。表現 $\bar{\rho} : \pi_1(X) \to \mathrm{GL}_1(\mathbb{F}_p)$ に対し、表現 $\rho : \pi_1(X) \to \mathrm{GL}_1(R)$ であって $\rho \bmod \mathfrak{m}_R = \bar{\rho}$ なるものを $\bar{\rho}$ の R への「持ち上げ」とか「変形」とかいう。(一般次元では持ち上げの強同値類を変形と呼ぶ。)

次に完備局所 $\mathbb{Z}_p$ 加群 R s.t., $R/\mathfrak{m}_R = \mathbb{F}_p$ の全体を考える。表現 $\bar{\rho} : \pi_1(X) \to \mathrm{GL}_1(\mathbb{F}_p)$ の普遍変形とは、$\bar{\rho}$ の変形 $\rho_{\text{univ}} : \pi_1(X) \to \mathrm{GL}_1(R_{\text{univ}})$ であって次の普遍性を満たすものである：「$\bar{\rho}$ の任意の変形 $\rho : \pi_1(X) \to \mathrm{GL}_1(R)$ に対し、ある一意な射 $\varphi : R^{\text{univ}} \to R$ があって $\varphi \circ \rho_{\text{univ}} = \rho$ となる。」

結び目 $K \subset S^3$ の補空間 $X = S^3 \setminus K$ の基本群 $\pi_1(X)$ を考え、メリディアン元を t と書く。全射準同型 $\widehat{\tau} : \widehat{\pi_1}(X) \to \mathbb{Z}_p$ は、$\mathbb{Z}_p \cong (1 + p\mathbb{Z}_p)$ によって $\mathrm{GL}_1(\mathbb{F}_p)$ への自明な表現の $R = \mathbb{Z}_p$ への変形と見れる。結び目群の $\mathrm{GL}_1(\mathbb{F}_p)$ 表現に対し、$R_{\mathrm{univ}} = \Lambda = \mathbb{Z}_p[[T]]$ となり、特に自明表現の普遍変形は次で与えられる：

$$\rho_{\mathrm{univ}} : \pi_1(X) \to \mathrm{GL}_1(\Lambda = \mathbb{Z}_p[[T]]); t \mapsto 1 + T.$$

実際、$\bar{\rho}$ の R への変形の全体を $\mathrm{Defo}(\bar{\rho}, R)$ とかく。R を固定すると二つの全単射

$$\mathrm{Defo}(\bar{\rho}, R) \to 1 + \mathfrak{m}_R; \rho \mapsto \rho(t), \quad \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}_p[[T]], R) \to 1 + \mathfrak{m}_R; \varphi \mapsto 1 + \varphi(T)$$

があり、$R \mapsto \mathrm{Defo}(\bar{\rho}, R)$ と $R \mapsto \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}_p[[T]], R)$ は関手として $R \mapsto 1 + \mathfrak{m}_R$ と自然同値。ゆえに $R \mapsto \mathrm{Defo}(\bar{\rho}, R)$ は関手として余表現可能で、$\mathbb{Z}_p[[T]]$ により余表現される。次の対応が普遍性を与える：

$$\mathrm{Defo}(\bar{\rho}, R) \to \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}_p[[T]], R); \rho \mapsto (\varphi_\rho : f(T) \mapsto f(\rho(t) - 1)).$$

さらに、岩澤（Alexander）加群と普遍変形が関係する:

$$\Lambda = \mathbb{Z}_p[[\Gamma]] \curvearrowright \mathcal{X} \cong \varprojlim H_1(X_{p^n}, \mathbb{Z}_p) \cong H_1(X, \Lambda) \cong H_1(\pi_1(X), \Lambda) = H_1(\rho_{\mathrm{univ}}).$$

4 SL_2 表現の普遍変形について

代数閉体 k を任意に取り、k を剰余体にもつ完備離散付置環 $\mathcal{O}$ を固定し、k を剰余体に持つ完備局所 $\mathcal{O}$ 代数 R の全体を考える。表現 $\overline{\rho} : \Pi \to \mathrm{SL}_2(k)$ の $\mathrm{SL}_2(R)$ への持ち上げの強同値類を $\overline{\rho}$ の変形と呼び、任意の変形が経由する表現 ρ_{univ} の強同値類を ρ の普遍変形と呼ぶ。

結び目群の良い $\mathrm{SL}_2(k)$ 表現の普遍変形環は指標スキームの表現環と同型である。また k 有理点について、指標スキームの表現環は被約化すると指標多様体の座標環の完備化と同型である。幾つかの良い結び目のクラスでは、もともと被約である。さらに個別に接空間の議論で補うと $\mathcal{O}$ 係数でも同型を言うことができる。

二橋結び目の Riley 標準表現 $\overline{\rho}$ に対して、char k が Riley の多項式 u の判別式を割らないとき普遍表現 ρ_{univ} を具体的に与えることができた。また、双曲結び目の場合には、Thurston の理論において Dehn 手術の係数が双曲構造の変形パラメータとなるが、それを普遍変形のパラメータに取れることも示された。

これらは肥田-Mazur の理論（[Hid06]）や R=T（[Sai13]）の類似と考えられる。（[MT07], [MTTU]）

謝辞. 講演の機会を下さった組織委員の先生方、有用なコメントを下さった森下昌紀先生、門上晃久先生、また大下達也さん、北島考浩さん、三原朋樹さんに感謝します。本研究は JSPS 科研費（25-2241）の助成を受けたものです。

References

[Gor72] C. McA. Gordon, *Knots whose branched cyclic coverings have periodic homology*, Trans. Amer. Math. Soc. **168** (1972), 357–370. MR 0295327 (45 #4394)

[Hid06] Haruzo Hida, *Hilbert modular forms and Iwasawa theory*, Oxford Mathematical Monographs, The Clarendon Press, Oxford University Press, Oxford, 2006. MR 2243770 (2007h:11055)

[Hil12] Jonathan Hillman, *Algebraic invariants of links*, second ed., Series on Knots and Everything, vol. 52, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Hackensack, NJ, 2012. MR 2931688

[HMM06] Jonathan Hillman, Daniel Matei, and Masanori Morishita, *Pro-p link groups and p-homology groups*, Primes and knots, Contemp. Math., vol. 416, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2006, pp. 121–136. MR 2276139 (2008m:57010)

[KM08] Teruhisa Kadokami and Yasushi Mizusawa, *Iwasawa type formula for covers of a link in a rational homology sphere*, J. Knot Theory Ramifications **17** (2008), no. 10, 1199–1221. MR 2460171 (2009g:57023)

[KM13] ———, *On the Iwasawa invariants of a link in the 3-sphere*, Kyushu J. Math. **67** (2013), no. 1, 215–226. MR 3089003

[Maz64] Barry Mazur, *Remark on alexander polynomial*, unpublished note, 1963–64.

[Mor12] Masanori Morishita, *Knots and primes*, Universitext, Springer, London, 2012, An introduction to arithmetic topology. MR 2905431

[MT07] Masanori Morishita and Yuji Terashima, *Arithmetic topology after Hida theory*, Intelligence of low dimensional topology 2006, Ser. Knots Everything, vol. 40, World Sci. Publ., Hackensack, NJ, 2007, pp. 213–222. MR 2371728 (2009a:11122)

[MTTU] Masanori Morishita, Yu Takakura, Yuji Terashima, and Jun Ueki, *On the universal deformations for SL_2-representations of knot groups*, submitted.

[Nii14] Hirofumi Niibo, *Idèlic class field theory for 3-manifolds*, Kyushu J. Math **68** (2014), no. 2, 421–436.

[NU] Hirofumi Niibo and Jun Ueki, *Idelic class field theory for 3-manifolds and very admissible links*, preprint.

[Och14] Tadashi Ochiai, *Iwasawa theory and its perspective I*, Iwanami Sutudies in Advanced Mathematics, Iwanami shoten, 2014.

[Rez97] Alexander Reznikov, *Three-manifolds class field theory (homology of coverings for a non-virtually b_1-positive manifold)*, Selecta Math. (N.S.) **3** (1997), no. 3, 361–399. MR 1481134 (99b:57041)

[Rez00] ———, *Embedded incompressible surfaces and homology of ramified coverings of three-manifolds*, Selecta Math. (N.S.) **6** (2000), no. 1, 1–39. MR 1771215 (2001g:57035)

[Sai13] Takeshi Saito, *Fermat's last theorem*, Translations of Mathematical Monographs, vol. 243, American Mathematical Society, Providence, RI, 2013, Basic tools, Translated from the Japanese original by Masato Kuwata. MR 3136492

[Sak79] Makoto Sakuma, *The homology groups of abelian coverings of links*, Math. Sem. Notes Kobe Univ. **7** (1979), no. 3, 515–530. MR 567241 (81g:57005)

[Uek] Jun Ueki, *On the Iwasawa invariants for links and Kida's formula*, submitted.

[Uek14] ———, *On the homology of branched coverings of 3-manifolds*, Nagoya Math. J. **213** (2014), 21–39.

[Was97] Lawrence C. Washington, *Introduction to cyclotomic fields*, second ed., Graduate Texts in Mathematics, vol. 83, Springer-Verlag, New York, 1997. MR 1421575 (97h:11130)

Email: `uekijun46@gmail.com`