

Non left-orderable surgeries and generalized Baumslag-Solitar relators

天摩 由貴

日本大学大学院総合基礎科学研究科

本稿では、3次元多様体内の結び目に沿った、左順序付不可能な基本群を持つ3次元多様体を生成するデーモン手術（左順序付不可能手術）に関する結果を報告します。本研究は、市原一裕氏（日本大学文理学部）との共同研究であり、科研費（課題番号:26400100）の助成を受けたものです。

Boyer-Gordon-Watson は、[2, Conjecture 1] において、現在では L-空間予想 とよばれる次の予想を提起しました：「既約な有理ホモロジー 3-球面が L-空間であるための必要十分条件は、その基本群が左順序付不可能なことであろう」。この予想は、現在、結び目理論とデーモン手術理論における重要な未解決問題の一つとなっています。ここで、非自明な群 G が左順序付可能 であるとは、 G 上に左不変な全順序 $<$ 、つまり、任意の $f, g, h \in G$ に対し $g < h$ ならば $fg < fh$ が成り立つ全順序 $<$ が存在すること、として定義されます。ただし、自明な群は左順序付不可能としておきます。また、有理ホモロジー 3-球面（ $\mathbb{Q}$ 係数のホモロジー群が全て S^3 と等しい 3次元多様体）が L-空間 であるとは、そのヒーガードフレアホモロジーのランクが（通常の）1次元ホモロジー群の位数と一致すること、として定義されます。ただし、ヒーガードフレアホモロジーについての説明はここでは省略します。詳しくは、例えば [8] を参照してください。

L-空間予想の研究において、L-空間を豊富に生成する方法として、デーモン手術が考えられています。デーモン手術 とは、3次元多様体どうしを関係づける次のような操作です。向きづけられた閉 3次元多様体 M 内の結び目 K に対して、

- (1) M から K の管状近傍 $N(K)$ の内部を引き抜く
- (2) ソリッドトーラスを（スロープ p/q に沿って）埋め戻す

ここで（スロープ p/q に沿って）の部分の説明をしておきます。結び目 K に沿ったデーモン手術によって得られる多様体の同相類は、 $[f(V \text{ のメリディアン })]$ で定まる $\partial N(K)$ 上のスロープ（単純閉曲線のイソトピー類）で決まります。ここで、 V はデーモン手術で貼り合わされるソリッドトーラス、 f は ∂V

から $\partial N(K)$ への貼り合わせ同相写像です．このスロープを，その手術の手術スロープと呼びます．さらに， K が 3 次元球面 S^3 内の結び目の場合，標準的なメリディアン-ロンジチュード系を用いて，そのようなスロープの集合は有理数の集合 $\mathbb{Q}$ および $\{1/0\}$ と同一視されます．

実際，もしも 3 次元球面 S^3 内の結び目が L-空間を生成する手術を一つ許容すれば，実は無限個許容するということが Ozsváth-Szabó [9] によって示されています．正確には，3 次元球面 S^3 内の結び目が L-空間を生成する手術を一つ許容すれば， $p/q \geq 2g(K) - 1$ となる任意のスロープ p/q に沿ったデー手術も L-空間を生成します（ただし， $g(K)$ は K の種数．）

近年では， S^3 内の結び目 K に沿ったデー手術において，左順序付不可能な基本群を持つ閉 3 次元多様体を与えるデー手術を左順序付不可能手術と呼んでいます．同様に，L-空間であるような閉 3 次元多様体を与えるデー手術を L-空間手術と呼んでいます．この時，L-空間予想との関連から， S^3 内のどのような結び目が左順序付不可能手術，もしくは L-空間手術を許容するのだろうか，ということが一つの問題として考えられます．

また最近では，L-空間手術研究の進展に伴って，例えばいくつかの結び目のクラスについて，その中で L-空間手術を許容するものの分類が得られてきています．例えば，プレッツェル結び目については，Lidman-Moore [5] により次のことが示されています．「双曲プレッツェル結び目の中で L-空間手術を許容するのは $(-2, 3, 2s + 1)$ -プレッツェル結び目（ただし， $s \geq 3$ ）だけである．」これにより，もしも L-空間予想が正しいとすると，双曲プレッツェル結び目については $(-2, 3, 2s + 1)$ -プレッツェル結び目のみが左順序付不可能手術を許容する，ということになります．

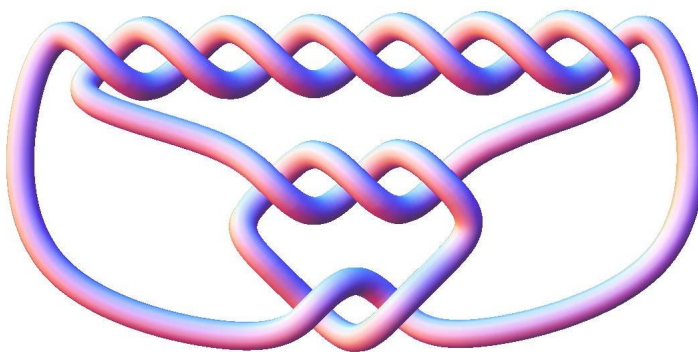


図 1: $(-2, 3, 7)$ -プレッツェル結び目

実際, Clay-Watson [3] および中江 [7] により, 独立に, $s \geq 3$ の時 $(-2, 3, 2s+1)$ -プレッツェル結び目は左順序付不可能手術を許容することが示されました. 正確には, [3] では $p/q > 2s+9$ の時, [7] では $p/q \geq 4s+7$ のとき, $(-2, 3, 2s+1)$ -プレッツェル結び目のスロープ p/q に沿ったデーモン手術が左順序付不可能手術になることが示されています. つまり, プレッツェル結び目については, L-空間手術を許容するならば左順序付不可能手術を許容することが分かりました. ただし, 逆が成り立つかどうかはまだ分かっていません.

この中江 [7] の手法を基に, 今回, 以下を示すことができました ([4]).

定理 1 (Ichihara-Temma, 2014). K を 3 次元多様体 M 内の結び目とし, $\pi_1(M - K)$ が 次のような表示を持つとする:

$$\langle a, b \mid (w_1 a^m w_1^{-1}) b^{-r} (w_2^{-1} a^n w_2) b^{r-k} \rangle$$

ただし, $m, n \geq 0$, $r \in \mathbb{Z}$, $k \geq 0$, そして a は K のメリディアンとする. また, K のロンジチュードが $a^{-s} w a^{-t}$ と表されているとする. ただし, $s, t \in \mathbb{Z}$, w は a^{-1}, b^{-1} を除くワード. このとき, $q \neq 0, p/q \geq s+t$ ならば, K のスロープ p/q に沿ったデーモン手術は, $\pi_1(K(p/q))$ が左順序付不可能であるような閉 3 次元多様体を与える.

ここで一つ興味深いことがあります. この定理における表示の関係子は, Baumslag-Solitar 関係子の一般化とすることができます. Baumslag-Solitar 関係子とは, x と y によって生成される群における, $x^{-n} y x^m y^{-1}$ ($m, n \neq 0$) という形の関係子のことです. これは, [1] で導入され, 現在ではこの関係子を含む群は Baumslag-Solitar 群と呼ばれて, 組み合わせ群論や幾何群論においてよく研究されています. 例えば, Shalen [10] によって, Baumslag-Solitar 関係子そのものは向き付け可能な 3 次元多様体の基本群の中には非退化な形では現れないことが示されています. しかし, 今回共役を取った形のものが結び目群の中に実際に現れて来ており, 群の左順序付可能性との関係性にも興味を持たれるところです.

次に, 定理 1 の系として得られた結果について説明します. $(-2, 3, 2s+1)$ -プレッツェル結び目を含むクラスとして, ねじれトーラス結び目というものがあります. ねじれトーラス結び目とは, S^3 内のトーラス結び目の一部を束ねてねじって作られる結び目のことです. 以下では, (p, q) -トーラス結び目から r 本をつまんで s 回ねじって得られる結び目を $K(p, q; r, s)$ で表します.

ねじれトーラス結び目については, Vafaee [11] により次のことが示されています. 「 $p \geq 2, k \geq 1, s > 0, 0 < r < p$ に対して, $(p, kp \pm 1; r, s)$ -ねじれトーラス結び目が L-空間手術を許容するための必要十分条件は, (1)

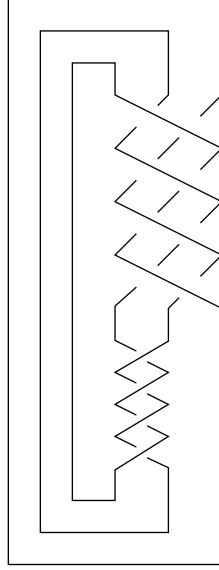


図 2: $(3, -4; 2, 2)$ -ねじれトーラス結び目

$r = p - 1$, もしくは (2) $r \in \{2, p - 2\}$, $s = 1$ である。」この結果に $p = 3$ を代入することにより, その系として, $(3, q; 2, s)$ -ねじれトーラス結び目は, $q > 0, s \geq 1$ のとき L-空間手術を許容する, ということが分かります. さらに, そのうち $(3, 5; 2, s - 2)$ -ねじれトーラス結び目は, 実は $(-2, 3, 2s + 1)$ 型のプレッツェル結び目になり, これが [5] で得られた L-空間手術を許容するプレッツェル結び目にちょうど対応しています.

これにたいして, この $(3, q; 2, s)$ -ねじれトーラス結び目が左順序付不可能手術を許容するかどうかというのが気になるところです. 実際, Clay-Watson [3] によって次のことが示されました! $(3, 3k + 2; 2, s)$ -ねじれトーラス結び目については, (1) $k \geq 0, s = 1$ の場合と (2) $k = 1, s \geq 0$ の場合には, 左順序付け不可能手術を許容する.

今回, 定理 1 を適用することにより, Clay-Watson [3] を拡張した結果として, 次の系が得られました.

系 1 (Ichihara-Temma, 2014). K を $(3, 3k + 2; 2, s)$ -ねじれトーラス結び目とする. ただし, $k, s \geq 0$. このとき, $q \neq 0, p/q \geq 2s + 3(3k + 2)$ ならば, K のスロープ p/q に沿ったデーン手術は, 左順序付不可能な基本群を持つ閉 3 次元多様体を与える.

この結果は, Christianson-Goluboff-Hamann-Varadaraj によって, 次のように拡張されました! $p, k, s > 0$ に対して, $(p, pk \pm 1; p - 1, s)$ -ねじれトーラス結び目および $(p, pk \pm 1; p - 2, 1)$ -ねじれトーラス結び目は左

順序付不可能手術を許容する。」これは、コロンビア大学のサマープログラムにおいて、私たちの論文を読んだ学生がその手法を元に作った定理です。

ここまでは、 s が正の場合、つまり、正の方向にねじった場合のみを考えてきましたが、 s が負の場合、つまり、負の方向にねじった場合にはどうなのかということが問題として考えられます。これについては、例えば茂手木 [6] において、 $p > q \geq 2, s \geq -1$ のとき、 $(p, q; p - q, s)$ -ねじれトールス結び目は L-空間手術を許容する、ということが示されています。また、私たちは最近、上の系における s が -1 の場合にも、左順序付不可能手術を許容することを証明することができました。つまり、 $k \geq 0, s \geq -1$ のとき、 $(3, 3k + 2; 2, s)$ -ねじれトールス結び目は左順序付不可能手術を許容する、となります。

定理の証明など、詳しいことは論文 [4] を参照ください。

参考文献

- [1] G. Baumslag and D. Solitar, Some two-generator one-relator non-Hopfian groups, *Bull. Amer. Math. Soc.* **68** (1962), 199–201.
- [2] S. Boyer, C. McA. Gordon and L. Watson, On L-spaces and left-orderable fundamental groups, *Math. Ann.* **356** (2013), no. 4, 1213–1245.
- [3] A. Clay and L. Watson, Left-orderable fundamental groups and Dehn surgery, *Int. Math. Res. Not.* **2013**, no. 12, 2862–2890.
- [4] K. Ichihara and Y. Temma, Non left-orderable surgeries and generalized Baumslag-Solitar relators, preprint, arXiv:1406.4700
- [5] T. Lidman and A. Moore, Pretzel knots with L-space surgeries, preprint, arXiv:1306.6707
- [6] K. Motegi, L-space surgery and twisting operation, preprint, arXiv:1405.6487
- [7] Y. Nakae, A good presentation of $(-2, 3, 2s + 1)$ -type pretzel knot group and $\mathbb{R}$ -covered foliation, *J. Knot Theory Ramifications* **22** (2013), no. 1, 1250143, 23 pp.
- [8] P. Ozsváth and Z. Szabó, On knot Floer homology and lens space surgeries, *Topology* **44** (2005), no. 6, 1281–1300.

- [9] P. S. Ozsváth and Z. Szabó, Knot Floer homology and rational surgeries, *Algebr. Geom. Topol.* **11** (2011), no. 1, 1–68.
- [10] P. B. Shalen, Three-manifolds and Baumslag-Solitar groups, *Topology Appl.* **110** (2001), no. 1, 113–118.
- [11] F. Vafaee, On the Knot Floer Homology of Twisted Torus Knots, to appear in *Int Math Res Notices* (2014).