

レンズ空間結び目のアレクサンダー多項式

丹下 基生

筑波大学数理物質系

概 要

デーン手術によってレンズ空間を作る結び目のアレクサンダー多項式にいくつかの制限をあたえる.

1 研究の動機

この講演の内容はプレプリント [8] にまとめられたものである. また、使われている手法は、第 58 回トポロジーシンポジウムで講演したときに説明した内容 [9] を一部応用したものである.

整数デーン手術によってレンズ空間を作ることができるような結び目をレンズ空間結び目という. レンズ空間 $L(p, q)$ はここでは 3 次元のレンズ空間を考えるとし、 $S^3 \subset \mathbb{C}^2$ を $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ を作用 $(z_1, z_2) \rightarrow (\zeta^{\frac{2\pi}{p}} z_1, \zeta^{\frac{2\pi q}{p}} z_2)$ で割った時の軌道空間のこととする. ここでは、次のような 2 種類のレンズ空間結び目を考える.

- L-空間ホモロジー球面内の結び目でレンズ空間を生むようなもの (A-type)
- 一般のホモロジー球面で、両原始結び目 (doubly primitive knot) であるもの (B-type)

である. L-空間とは全てのスピンの構造に対してヒーゴルフレアホモロジーが S^3 と同型である空間であるが、ホモロジー球面であるとする S^3 や $\Sigma(2, 3, 5)$ やその逆向き、およびそれらの連結和など代表的なものが知られているが、現在のところそれ以外に存在するかどうかは知られていない. (Y, K) が両原始結び目とは次のような結び目である.

1. Y のヒーゴール種数は 2 である.
2. $Y = H_2 \cup_{\Sigma_2} H_2$ をそのヒーゴール分解とすると、 K はヒーゴール曲面 Σ_2 の上に乗る.
3. そのような K は 2 つの種数 2 のハンドル体 H_2 の基本群の元を誘導する. その元は “どちらも” $\pi_1(H_2) = F_2$ の 2 つの生成元のうち 1 つとなる. つまり、どちらの元もハンドル体の基本群の生成元になっている.

両原始結び目の性質は、ある整数でのデーン手術がレンズ空間になることである。つまり、任意の両原始結び目はレンズ空間結び目である。

A-type かつ B-type となる結び目は L-空間ホモロジー球面内の両原始結び目である。ここで、一般的な予想を述べておく。

予想 1.1 (レンズ空間結び目予想 [1]). S^3 内のレンズ空間結び目は両原始結び目である。

S^3 において、両原始結び目はレンズ空間を生むが、逆にレンズ空間を生むなら両原始結び目であるということである。また、これが成り立つためには、 S^3 であることが必要である。例えば、 $\Sigma(2, 3, 5)$ 内の結び目に対して、両原始結び目でないがレンズ空間を生む結び目が構成されている [7]。次に研究の動機となる定理を述べておく。

定理 1.1 (Ozsváth-Szabó[5], 市原-斎藤-寺垣内 [3]). K を A-type もしくは、B-type のレンズ空間結び目とする。このとき、アレクサンダー多項式は以下の形になる。

$$\Delta_K(t) = (-1)^r + \sum_{j=1}^r (-1)^{j-1} (t^{n_j} + t^{-n_j})$$

ここで、 $d = n_1 > n_2 > \cdots > n_r > 0$ 特に最高次係数は 1

つまり、レンズ空間結び目のアレクサンダー多項式の係数はいつも ± 1 もしくは 0 であり、非零係数 ± 1 は順に交代的になっているということである。上の定理はレンズ空間結び目のアレクサンダー多項式のある特徴を捉えているが、それは十分な条件ではない。つまり、そのほかにアレクサンダー多項式に何か制限が存在するはずである。その制限を突き止めることがこの研究の動機である。

ここで考える結び目のアレクサンダー多項式はいつもこの形なので、non-zero な係数の指数 (exponent) を記述する数列 NS を上の定理の係数 n_i を使って書くと

$$\begin{aligned} NS(K) &:= (n_1, n_2, \cdots, n_r, n_{r+1}, n_{r+2}, \cdots, n_{2r+1}) \\ &= (n_1, n_2, \cdots, n_r, 0, -n_r, \cdots, -n_1) \\ NS_h(K) &:= (n_1, n_2, \cdots, n_r, 0) \end{aligned}$$

とする。2つ目のものはアレクサンダー多項式の係数が対称であることから、係数 NS を半分にしたものである。例として、以下のものをあげておく。

$$\begin{aligned} NS_h(T_{2,3}) &= (1, 0) \\ NS(T_{2,3}) &= (1, 0, -1) \\ NS_h(T_{2,2n+1}) &= (n, n-1, \cdots, 1, 0) \\ NS_h(T_{3,4}) &= (3, 2, 0) \\ NS_h(T_{3,5}) &= (4, 3, 1, 0) \\ NS(Pr(-2, 3, 7)) &= (5, 4, 2, 1, 0, -1, -2, -4, -5) \\ NS_h(Pr(-2, 3, 7)) &= (5, 4, 2, 1, 0) \end{aligned}$$

ここで、 $Pr(p, q, r)$ は (p, q, r) -プレッツェル結び目である。レンズ空間結び目のアレクサンダー多項式は、 NS および NS_h によって全て特徴づけられる。また、この列の奇数番目が 1 の係数をもつ成分の指数、偶数番目が -1 の係数をもつ成分の指数である。

2 レンズ空間手術のパラメータの実現について

次にある結び目がデーン手術によってレンズ空間を得るとき、その手術のパラメータについて考える． $K \subset Y$ の整数手術を $Y_p(K)$ とする． $Y_p(K)$ がレンズ空間 $L(p, q)$ であるとき、自然に $\tilde{K} \subset Y_p(K)$ となる双対結び目得られる．この $\tilde{K}$ はホモロジーの元 $[\tilde{K}] \in H_1(L(p, q), \mathbb{Z})$ を誘導し、 $[\tilde{K}] = k[C]$ なる整数 $k \in \mathbb{Z}$ を誘導する．ここで、 C は $L(p, q)$ の種数 1 のヒーゴール分解に対してその種数 1 のハンドル体のコアである．整数 k はレンズ空間の 1st ホモロジー群が $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ であることから、 $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ の元として意味があり、 $[\tilde{K}]$ は H_1 の中で生成元であることから、 $k \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times$ であることがわかる．つまり (p, k) は互いに素な整数の組みである．また、交差形式を使うことで、 $k^2 = -q \bmod p$ も成り立つ．このような組み (p, k) もしくは $(p, k, |k_2|)$ をレンズ空間手術パラメータという．このパラメータはいつも、 $0 < k < \frac{p}{2}$ を満たすようにしておくことができ、 C の取り方によって k を $k^{-1} \bmod p$ に取り換えることができる．また、 k を固定したとき、 k_2 を k の $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ の逆元であって $|k_2| < \frac{p}{2}$ をみたす数とする． k_2 の符号を e と定義する．

この互いに素なパラメータ (p, k) に対して、このパラメータをもつあるレンズ空間手術 $Y_p(K) = L(p, q)$ が存在するとき、パラメータ (p, k) は (Y, K) によるレンズ空間手術によって実現されるということにする．このとき、以下が知られている．

命題 2.1. 任意のパラメータ (p, k) はあるホモロジー球面内の両原始結び目 (Y, K) のレンズ空間手術によって実現される．

この両原始結び目を $K_{p,q}$ とかくことにする．

定理 2.1 (Greene[2]). (p, k) が S^3 内の結び目のレンズ空間手術によって実現されるとすると、そのパラメータはある S^3 内の両原始結び目のレンズ空間手術によって実現される．

実現問題は、レンズ空間がパラメータを実現するようにあるホモロジー球面 (S^3 に制限することもある) の中に結び目を作ることができるかどうかという問題であり、その結び目が具体的にどのような結び目かということは問わない．デーン手術でできる“レンズ空間”を分類しているという立場で考えることと同じである．Greene の定理は S^3 内でレンズ空間を作ることができるなら、そのレンズ空間は両原始結び目で代表して作ることができることを主張している．これは、上のレンズ空間手術予想に迫っているように思えるが、 S^3 内のレンズ空間結び目を全て分類することからは程遠い．もし同じパラメータを持つレンズ空間結び目を全て書き出すような技術が開発されれば、レンズ空間手術予想は解決する．

3 主結果

アレクサンダー多項式の公式 (後述) とある横断定理を用いることで、以下のようなレンズ空間結び目のアレクサンダー多項式に関する制限を得た．

定理 3.1. K を A -type か B -type の結び目とする．このとき、 $d = n_1$ とすると、 $n_2 = d - 1$ である．

つまり、アレクサンダー多項式は

$$NS(K) = (d, d - 1, \dots)$$

のように展開できる.

K を A-type、B-type の結び目とし、 NS から以下のような数 $\alpha(K)$ を取り出す.

$$\alpha(K) := \max\{n_1 - n_{2j+1} | n_{2i-1} - n_{2i} = 1, 1 \leq \forall i \leq j \leq r\}$$

この不変量は $\Delta_K(t)$ の展開係数のうち、 $\{1, -1\}$ がこの順で隣り合う指数の領域の長さを表している.

例として、以下のように数を取り出せる. $T_{r,s}$ を (r, s) -トーラス結び目とする. 例えば、 $NS(T_{2,2n+1}) = (n, n-1, \dots, 1, 0, -1, -2, \dots, -n)$ と計算できるので、 $\alpha(T_{2,2n+1}) = 2n$. $NS(T_{3,5}) = (4, 3, 1, 0, -1, -3, -4)$ であるので、 $\alpha(T_{5,3}) = 5$. また、トーラス結び目以外においては、 $NS(Pr(-2, 3, 7)) = (5, 4, 2, 1, 0, -1, -2, -4, -5)$ より、 $\alpha(Pr(-2, 3, 7)) = 7$ が成り立つ. 以下が得られる.

定理 3.2. K を A or B のレンズ空間結び目とする. もし $\alpha(K) = 2$ を満たすなら、 K は *trefoil*.

定理 3.3. K を A or B のレンズ空間結び目とする.

$$\alpha(K) + 1 \geq \max\{k, |k_2|\}$$

を満たす.

定理 3.4. K を A or B のレンズ空間結び目とする. このとき、 $\Delta_K(t)$ の非零係数の数を $2r + 1$ とすると、

$$\max\{k, |k_2|\} \leq 2r + 1$$

が成り立つ.

定理 3.5. K を A -type もしくは B -type のレンズ空間結び目とし、 $\Delta_K(t)$ が 4 つ以上の非零係数を持つとすると、 $(n_1, n_2, n_3, n_4, \dots)$ は以下のどれかになる.

$$NS(K) = (d, d-1, e, e-1, \dots), (d, d-1, e, e-2, \dots),$$

$$\text{or}, (d, d-1, e, e-3, \dots)$$

ただし、 A -type であれば、 $(d, d-1, e, e-3, \dots)$ は起こらない.

系 3.1. $(p, k, |k_2|)$ を A -type かつ $2g(K) - 4 \leq |k_2| \leq 2g(K) - 1$ を満たすなら K は次のレンズ空間結び目によって実現される.

$$T_{4,3}, \text{ or } Pr(-2, 3, 7)$$

系 3.2. K を $g(K) \leq 5$ かつ A -type 結び目とする. このとき、 K は次によって実現される

$$T_{2,3}, T_{2,5}, T_{2,7}, T_{3,4}, T_{2,9}, T_{3,5}, T_{2,11}, \text{ or } Pr(-2, 3, 7)$$

系 3.3. K を 7 個以下の非零係数をもつ A -type or B -type のレンズ空間結び目とする. このとき K は次のひとつによって実現される:

$$T_{2,3}, T_{2,5}, T_{4,3}, T_{2,7}, T_{3,5}, T_{4,5}$$

ある多項式に対して、その多項式をアレクサンダー多項式をもつレンズ空間手術パラメータは一意とは限らない．例えば、よく知られているのは、同じトーラス結び目 $T_{r,s}$ でも $(rs \pm 1, r^2)$ と 2 種類のパラメータをもつし、トーラス結び目以外にも $Pr(-2, 3, 7)$ は 2 種類のパラメータ $(18, 5), (19, 7)$ によってレンズ空間を構成する．

また、以下のように違う結び目どうしても同じアレクサンダー多項式になるものは存在する．

$$\begin{aligned} NS(K_{10,3}) &= NS(T_{5,8}), NS(K_{15,4}) = NS(T_{4,11}), NS(K_{17,3}) = NS(T_{3,11}) \\ NS(K_{19,3}) &= NS(T_{3,13}), NS(K_{17,4}) = NS(T_{4,13}), NS(K_{20,9}) = NS(T_{9,11}) \\ NS(K_{21,8}) &= NS(T_{8,13}), NS(K_{23,5}) = NS(T_{5,9}) \end{aligned}$$

ただし、これらの例は違うホモロジー球面同士にいる．同じホモロジー球面どうしのレンズ空間結び目が、違う isotopy クラスをもつ結び目であり、同じアレクサンダー多項式をもつ例があるかどうかはよくわからない．これは S^3 の場合でかつ、同じパラメータを持つならレンズ空間手術予想の反例である．さらに、同じ手法で次も得ることができる．

定理 3.6. (Y, K) を A -type もしくは B -type のレンズ空間結び目であるとする． $(p, k, |k_2|)$ (ただし $k \leq |k_2|$) をパラメータとすると、次は同値である．

1. $\Delta_K(t) = \Delta_{T(2,2d+1)}(t)$
2. $(p, k, |k_2|) = (p, 2, 2d+1)$.
3. この手術は $T_{2,2d+1}$ によって実現される．
4. $|k_2| = 2g(K)$ or $|k_2| = 2g(K) + 1$.

つまり $\Delta_{T_{2,2d+1}}$ と同じアレクサンダー多項式をもつレンズ空間結び目は、 $T_{2,2d+1}$ のレンズ空間手術のパラメータ以外には存在しない．しかし、すぐ上の例が示しているようにそうではないトーラス結び目にはホモロジー球面は違うが、同じアレクサンダー多項式をもつ（パラメータも違う）レンズ空間結び目が存在する．

4 証明の概略

前セクションにおいて挙げた結果を証明するのに使う手法をここで紹介し、証明のスケッチを与える．まず、 A -type と B -type においてアレクサンダー多項式の公式を与える．

命題 4.1 (門上、山田)． K がレンズ空間結び目ならば、ある互いに素な整数 k, l が存在して、

$$\Delta_K(t) \doteq \frac{(t^{kl} - 1)(t - 1)}{(t^k - 1)(t^l - 1)} \bmod t^p - 1$$

となる．ただし、 $kl \equiv \pm 1 \bmod p$

この定理から、 A -type の結び目であれば、[4] の不等式 $2g(K) - 1 \leq p$ から、右辺の多項式を $t^p - 1$ で割った係数から

$$a_i := a_i(K) = -m + e \cdot \#\{j \in I_k | [-q(j + ki + c)]_p \in I_{k_2}\}$$

が得られる ([6])．ここで、 $a_i(K)$ は対称化されたアレクサンダー多項式の i 番目の係数である．また、 B -type のアレクサンダー多項式として

命題 4.2 (市原-斎藤-寺垣内). (Y, K) を B -type の結び目とすると、下のような公式が成り立つ.

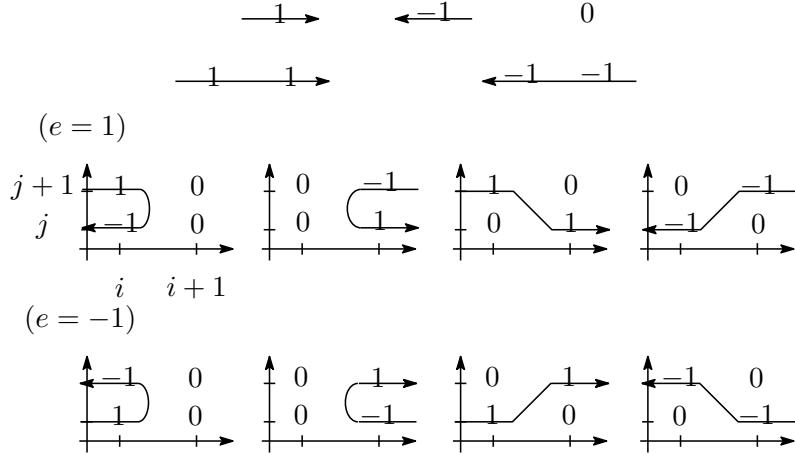
$$\Delta_K(t) \doteq \frac{\sum_i t^{\Phi(i)p - [[q'i]]_p k}}{\sum_{i=0}^{k-1} t^k}$$

$\Phi(i) = \#\{j \in I_{k-1} | [[q'j]]_p < [[q'i]]_p\}$, q' は q の逆元、 $[[\alpha]]_p$ は 1 から p へ簡約された α を p で割った時の余り.

このアレクサンダー多項式の公式をつかうことで、これらのアレクサンダー多項式の係数に対してある特徴が得られる. ここでは簡単のため A -type のときだけ述べる. B -type のときも並行して同じようにできる.

$$A(x) := A(i, j) := \bar{a}_{-j-k_2(i+c)}$$

とおく. このとき、係数 $\bar{a}_i$ は $\Delta_K(t)$ の non-zero な係数が $|i| \leq \frac{p}{2}$ に限られているので、 $\bar{a}_i$ は i を p で割ったときの余りが $|j| \leq \frac{p}{2}$ であるときの $\Delta_K(t)$ の係数 a_j を取る. このとき、平面 $\mathbb{R}^2$ 上の格子点 $\mathbb{Z}^2$ に $A(i, j)$ が付されている状況になる. $A(i, j)$ はレンズ空間結び目のアレクサンダー多項式の係数なので ± 1 もしくは 0 となる. このような状況で、平面上に、以下の操作で、ある向きのついた曲線を描くことができる. まず、平面上の 1 の場所には右向きに矢印を書く. -1 には右向きに矢印を書く. 0 の点には何も書かない. $1, 1$ および、 $-1, -1$ が隣り同士ならその矢印をつなぐ. また、縦に 1 と -1 が並んでいる. もしくは $1, 1$ および $-1, -1$ が斜めに並んでいるとすると、下のように矢印をつなぐ.



このようにして曲線を拡張していったものを非零曲線といい、下の命題が成り立つ.

命題 4.3. 非零曲線は、終わりのない (end は有限ではない)、互いに交わらない無限個の単純な曲線である.

B -type のときは、作り方から有限個 (あとの定理からただ一つとなる) の曲線が得られる. また、非零曲線の定義から、平面上の全ての非零係数はある非零曲線によって横切られている.

次に、 $i = i_0$ を固定する. このとき、係数 $A(i_0, j)$ は、ある整数 j_0 が存在して、 $A(i_0, j_0 + j) = a_j$ が成り立つ. 対称化されたアレクサンダー多項式の最高次の係数を d として、

$$\{(i_0, j_0 + j) | |j| \leq d\} = \Delta(i_0)$$

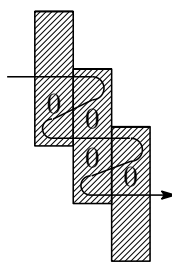
とおく．この点の近傍を $B(i_0) := \cup_{(i,j) \in \Delta(i_0)} B_{i,j}$ とする．ただし、 $B_{i,j} = \{(x,y) | |x-i| + |y-j| \leq \frac{1}{2}\}$ である．このとき、 $B = \cup_{i \in \mathbb{Z}} B(i)$ とする．ここで、 i に対して j_0 の取り方は一般には一意ではないが、ここでは隣同士の $B(i)$ と $B(i+1)$ の和が連結であるようなものをとる．この領域 B を非零領域という．この領域を j 方向に np ($n \in \mathbb{Z}$) だけ平行移動したときにも同じように非零領域が存在する．(B-type のときは B だけを考える．) それらの領域の中には、 $\mathbb{Z}^2$ 上の全てのアレクサンダー多項式の非零係数が入っている．ここで、主張したいことは次である．

定理 4.1. ある非零曲線は、非零領域 B に含まれており、 B の中に存在する非零曲線の成分はただ一つである．また、非零曲線の j 座標は $e = 1$ であれば単調減少であり、 $e = -1$ であれば単調増加である．

これは、レンズ空間結び目の非零係数 ± 1 が交替的になっていることからくる帰結である．系として次が得られる．

系 4.1 (非零係数の横断定理)．任意の i において、点集合 $\Delta(i)$ 内の全ての非零係数はただ一つの非零曲線によって横切られている．

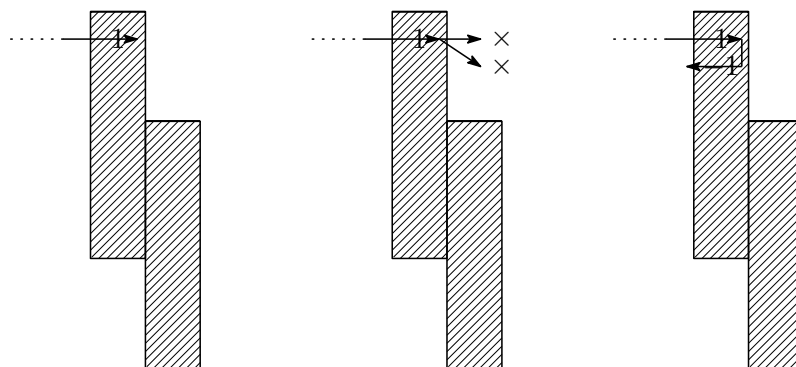
また逆に言えば、ある非零曲線にはアレクサンダー多項式の非零係数を全て通る．例として、 $T_{3,4}$ のレンズ空間手術の非零領域と非零曲線を下に描いておく．



これらの非零曲線の性質を使って、得られる結果の証明の概略を述べる．

定理 3.1 の証明のスケッチ

最高次の係数は 1 なので矢印は右向きになっている．さらに、矢印は end は存在しないから次の格子点に向かうはずであり、図の場合は j 座標は単調減少である．その格子点是非零領域内に限られるので、外に出るような下の真ん中の図の矢印はあり得ない．つまり、最高次の係数 1 のすぐ下の係数が -1 となるしかない． $\square$



定理 3.3 も同じ議論を他の係数 1 に対して行うことで証明することができる．

今後の課題として、上の横断定理をレンズ空間手術の分類に生かすことを考えている。また、L-空間ザイフェルト空間手術に関しても、係数公式から同じことが成り立つが、特異ファイバーの本数分 n に対して高次元化された $\mathbb{R}^n$ を行う必要があるだろう。L-空間ではないザイフェルト手術は一般には難しいとされている。

謝辞

この研究集会で発表する機会を与えて下さった大山淑之氏と新國亮氏に大変感謝しています。またこの研究は日本学術振興会 (26800031) によって支援されています。

参考文献

- [1] J. Berge, *Some knots with surgeries yielding lens spaces*, unpublished manuscript.
- [2] J. Greene, *The lens space realization problem*, Ann. of Math. (2) 177 (2013), no. 2, 449-511
- [3] K. Ichihara, T. Saito, and M. Teragaito, Alexander polynomials of doubly primitive knots, Proc. Amer. Math. Soc. 135 (2007), 605-615
- [4] P. Ozsváth and Z. Szabó, *Absolutely graded Floer homologies and intersection forms for four-manifolds with boundary*, Adv. Math. 173 (2003), no. 2, 179-261,
- [5] P. Ozsváth and Z. Szabó, *On knot Floer homology and lens space surgeries*, Topology Volume 44, Issue 6 , November 2005, Pages 1281-1300
- [6] M. Tange, *Ozsváth-Szabó's correction term of lens surgery*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 146 (2009), no. 1, 119-134
- [7] M. Tange, *Lens spaces given from L-space homology spheres*, Experimental Mathematics Vol.18(2009) Number 3 285-301
- [8] M. Tange, *On the Alexander polynomial of lens space knot*, arXiv:1409.7032
- [9] 丹下基生, レンズ空間におけるデーン手術実現問題, 第 58 回トポロジーシンポジウム (筑波大学) 予稿集