

Strong and weak (1, 2) homotopies on knot projections and new invariants

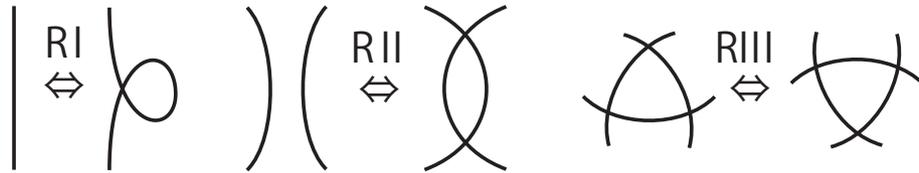
伊藤 昇 (早稲田大学高等研究所)
 瀧村 祐介 (学習院中等科)

概要

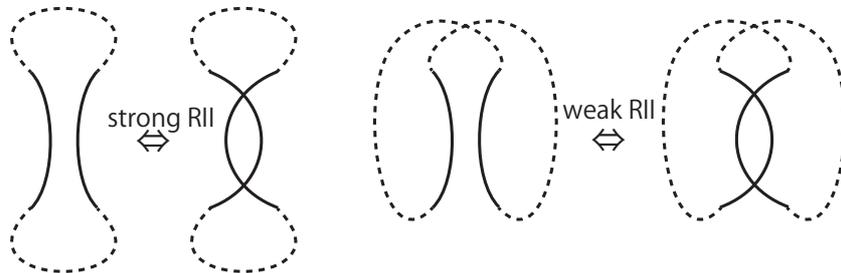
球面上の knot projection における、射影された Reidemeister move を用いて strong(1, 2), weak(1, 2) という同値関係を考え、それぞれの同値関係において2つの knot projections が移り合うための必要条件を得た。また、一方方向のみの smoothing を用いて strong(1, 2) に関する新しい整数値不変量を得て、その幾何的な特徴付けを報告する。詳しくは、[2] を参照して頂きたい。

Definition 1.

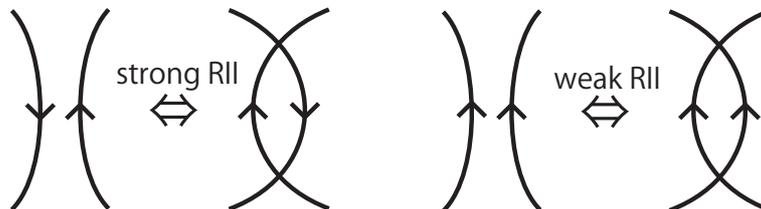
球面上の knot projection において、射影された RI, RII, RIII を次のように定義する。



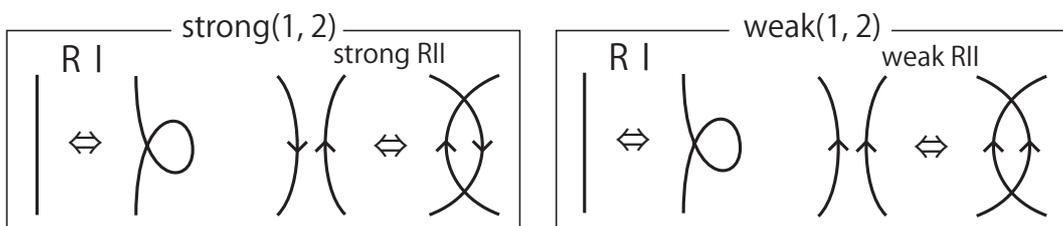
RII の外側のつながり方で、さらに細かく strong RII, weak RII を定義する。



これらは、向きを付けて次のようにも定義することが出来る。(strong RII は向きを逆にしたものもあるが、ここでは省略する。)



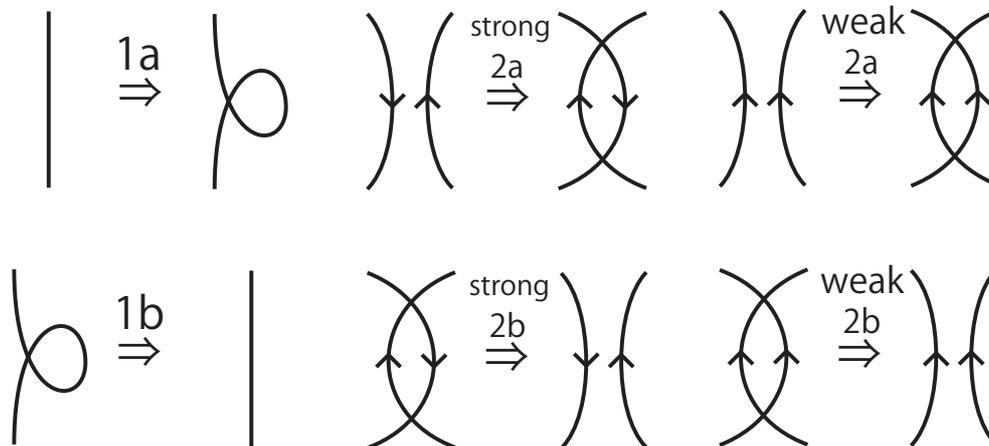
これらと RI を組み合わせて、strong(1, 2)、weak(1, 2) を次のように定義する。



[1] では、RI, RII における球面上の knot projection の分類がされている。そこで今回は、strong(1, 2) と weak(1, 2) において分類することを考える。

Definition 2.

RI, strong RII, weak RII を、次のようにさらに細かく定義する。



Definition 3.

- (1) knot projection P を 1b, strong 2b で reduced にしたものを P^{sr} と表す。
- (2) knot projection P を 1b, weak 2b で reduced にしたものを P^{wr} と表す。

RI, RII で分類した時とほぼ同じ証明で、strong(1, 2)、weak(1, 2) の分類をすることが出来た。証明は、[2] に記されている。

Theorem 1.

- (1) knot projection P_1, P_2 が strong(1, 2) で移り合うための必要十分条件は、球面イソトピーで $P_1^{sr} \cong P_2^{sr}$ であることである。
- (2) knot projection P_1, P_2 が weak(1, 2) で移り合うための必要十分条件は、球面イソトピーで $P_1^{wr} \cong P_2^{wr}$ であることである。

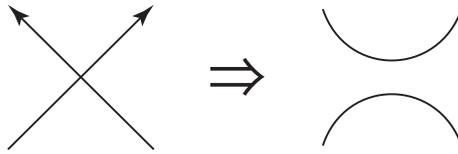
Corollary 1.

knot projections P において、 P^{sr}, P^{wr} は一意的である。

この結果により、球面上の knot projection を strong(1, 2)、weak(1, 2) で分類することが出来たのだが、ここで strong(1, 2) における不変量を定義する。

Definition 4.

P に向きをつけ、全ての交点において以下の smoothing をしたときに出来る circle の球面上の配置を $\tau(P)$ 、circle の数を $|\tau(P)|$ と表す。

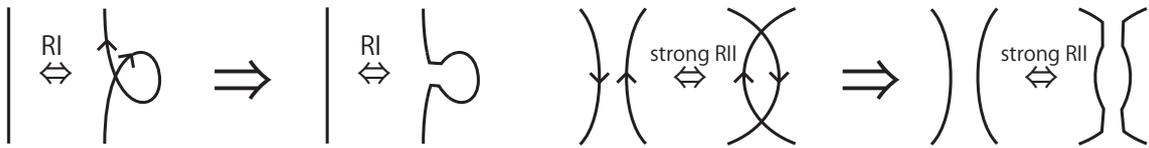


Theorem 2.

circle の配置 $\tau(P)$ と circle number $|\tau(P)|$ は strong(1, 2) において不変である。

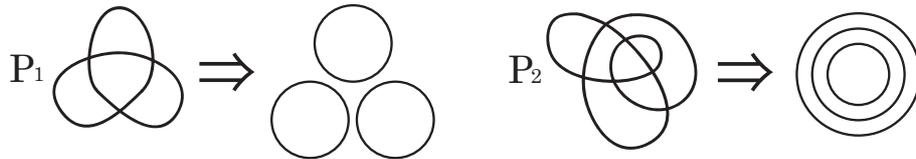
Proof of Theorem 2.

図によって確認出来る。

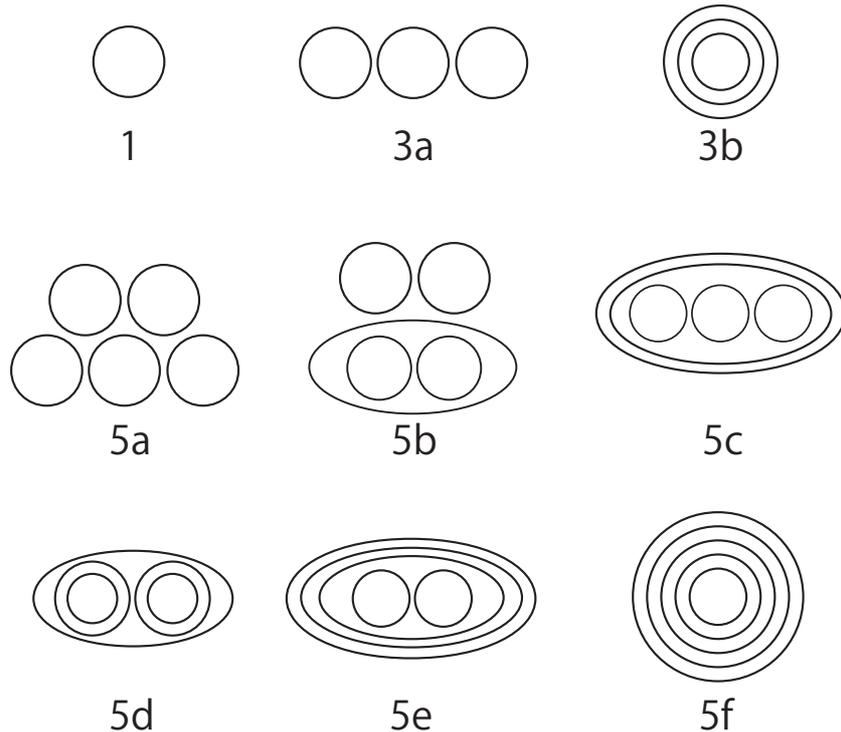


Example 1.

図の P_1, P_2 において、 $|\tau(P_1)| = |\tau(P_2)| = 3$ であるが、 $\tau(P_1) \neq \tau(P_2)$ であるため、strong(1, 2) では移り合わないことがわかる。



circle number が 5 以下の $\tau(P)$ をまとめると、以下のようになる。

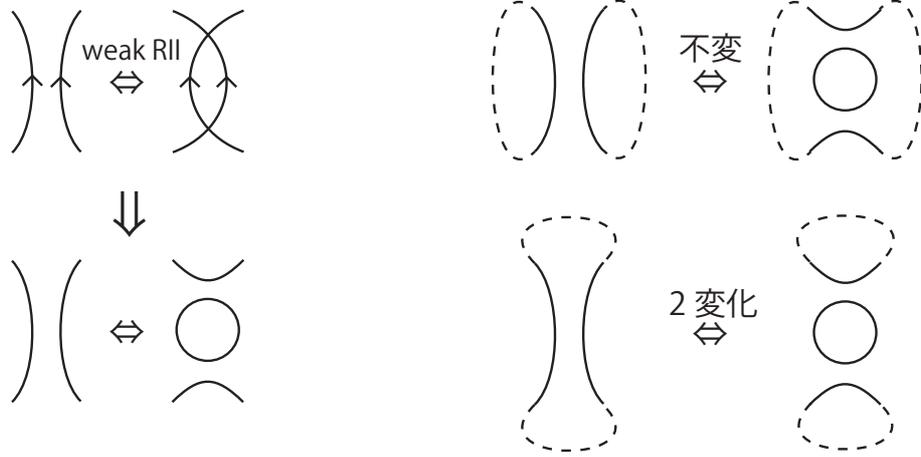


Theorem 3.

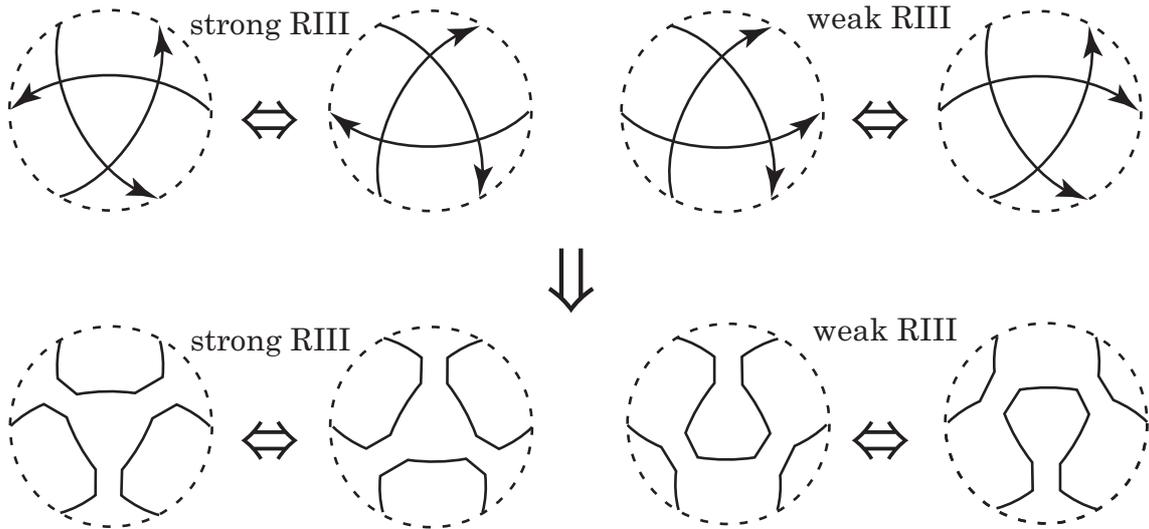
$|\tau(P)|$ は常に奇数になる。

Proof of Theorem 3.

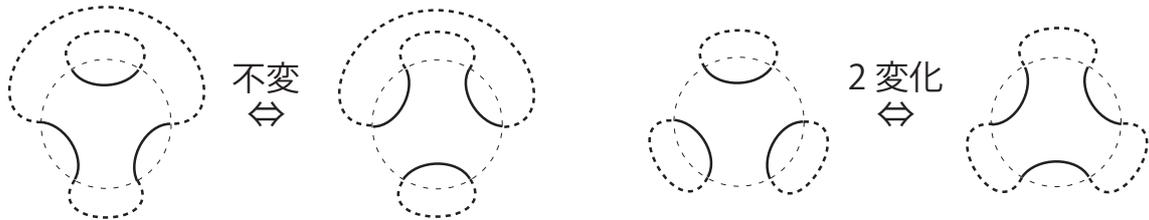
weak RII において $|\tau(P)|$ は、図のように不変の場合と、2 変化する場合がある。



RIII は、RII と同様に向きを付けて、さらに細かく strong RIII, weak RIII と定義出来る。



これらは smoothing した後は本質的に同じであるが、 $|\tau(P)|$ は不変の場合と、2 変化する場合がある。



五つの局所変形による $|\tau(P)|$ の変化を表にすると、図のようになる。

	RI	strong RII	weak RII	strong RIII	weak RIII
$ \tau(P) $	不変	不変	不変 or 2	不変 or 2	不変 or 2

これより、 $|\tau(P)|$ は mod 2 で不変である。また、 P が trivial のとき $|\tau(P)| = 1$ であることから、Theorem 2 が示される。

Proposition 1.

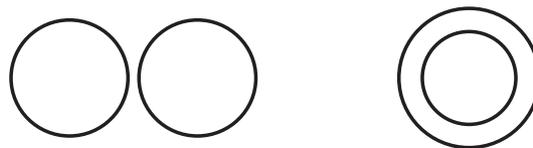
$$|\tau(P_1 \# P_2)| = |\tau(P_1)| + |\tau(P_2)| - 1$$

Theorem 4.

任意の circle 配置 $\tau(P)$ を持つ prime な knot projection P が存在する。

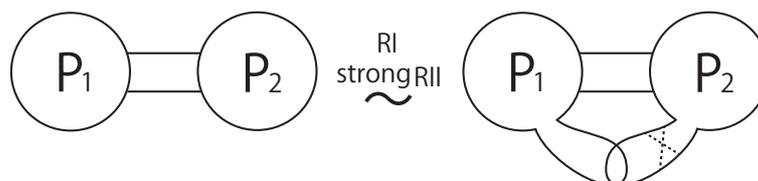
Lemma 1.

任意の $\tau(P)$ は、以下のどちらかを部分的に含む。



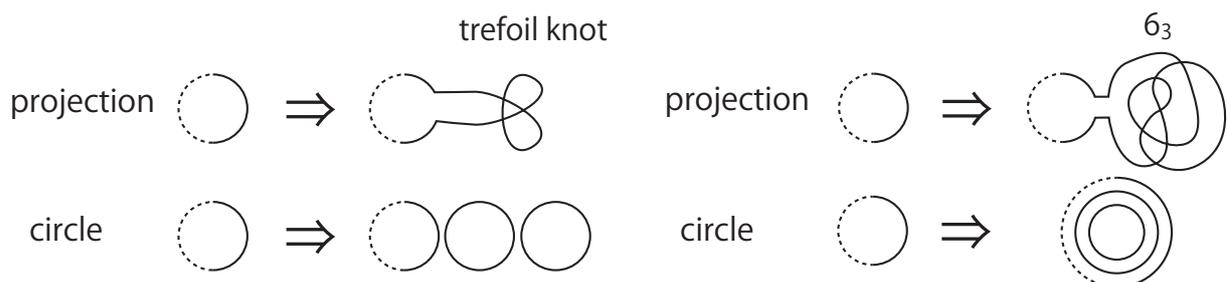
Lemma 2.

prime ではない knot projection でも、有限回の strong(1, 2) で prime に出来る。

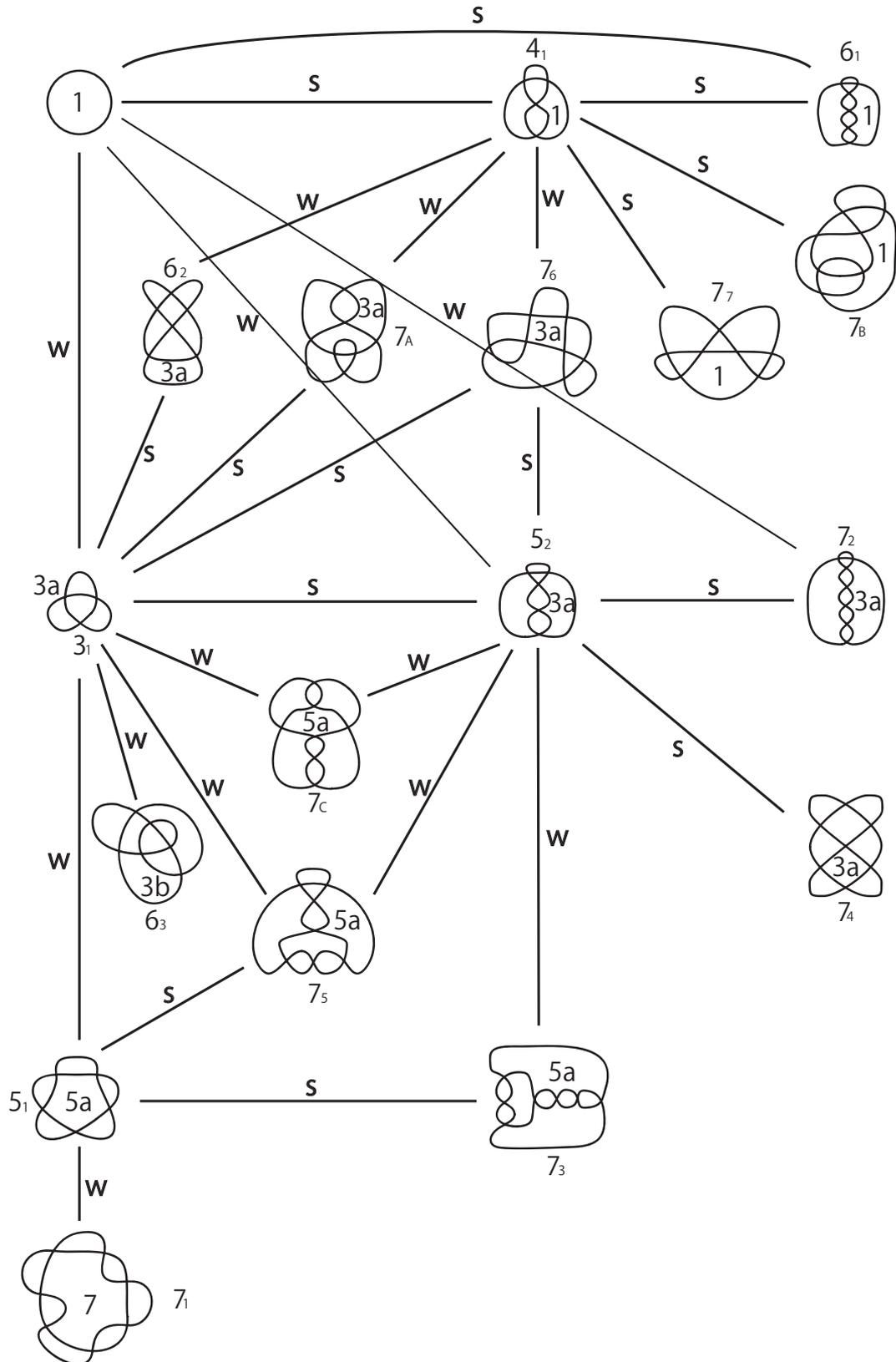


Proof of Theorem 4.

図のように、trefoil knot や 6_3 を局所的に連結することで、Lemma 1 の circle を追加していくことが出来る。これを繰り返すことにより、任意の $\tau(P)$ を持つ knot projection P を構成することが出来る。出来あがった knot projection P は、Lemma 2 より prime に変形することで、Theorem 3 が示される。



7交点までの、prime で reduced な knot projection を表にした。図中に書かれている記号は、 $\tau(P)$ である。(3 ページ目の図を参照。) s で結ばれているペアは1回の strongRII と有限回の RI で、w で結ばれているペアは1回の weak RII と有限回の RI で移り合うことがわかっていることを表している。



参考文献

- [1] N. Ito and Y. Takimura, *(1, 2) and weak (1, 3) homotopies on knot projections*, J. Knot Theory Ramifications **22** (2013), 1350085, 14pp.
- [2] N. Ito and Y. Takimura, *Strong and weak (1, 2) homotopies on knot projections and new invariants*, preprint.