# Knots and Links in Chiral Nematic Colloids

埼玉大学大学院 理工学研究科
数理電子情報系専攻 数学コース

下川研究室 修士2年

武内　佑馬

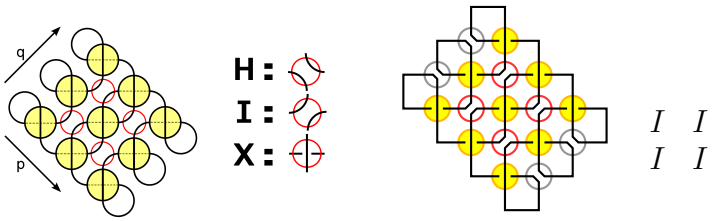
## 1. Introduction

コロイド粒子を液晶の中に入れると, コロイド粒子の周りに土星の環のような欠陥線が現れる．複数のコロイド粒子を並べることで欠陥線が繋がり，様々な絡み目を構成することができる．本研究では，論文 [1] で実験的に行われたコロイド粒子を格子状に並べる様子を数学的にモデル化し，この構成方法で任意の絡み目が得られることを導き出したので，これを大まかに紹介する．詳しい内容については，修士論文 [3] を参照して頂ければ幸いである．

## 2. Definitions

**Definition 2.1.** 次の図のようにコロイドを $p \times q$ の行列の様に並べ，その欠陥線が結び付いて得られる絡み目の図式を *colloidal particle array diagram (CPA diagram)* と呼ぶ.

図の黄色の円で表されたコロイドにあたる部分を「コロイド部分」，４つのコロイドの中心で形状に自由度のある部分を「タングル部分」と呼ぶ．タングル部分には H,I,X と名付けた 3 種類の形状が入る．これをタングルとみなす.
また，CPA diagram はタングル部分の情報のみで得られる絡み目が決定されるので，これを抽出し行列のように並べたものを CPA diagram の表示と呼ぶ.



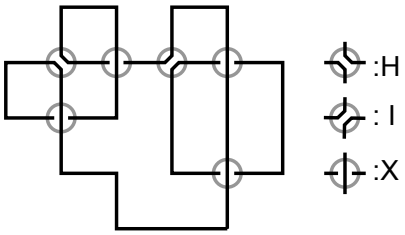

今回の主結果は以下のものである．

**Theorem 2.2.** 任意の絡み目は，*CPA diagram* で表すことができる．

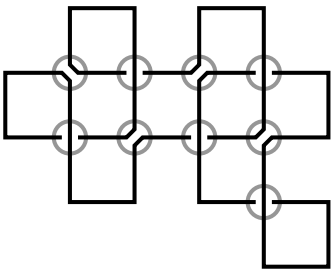
続いて証明の為の準備をする．

**Definition 2.3.** 頂点集合 $V$ が $V = V_2 \cup V_4$ となる 2 次元格子グラフをとる．全ての $v \in V_4$ を以下の図の様なタングル H,I,X に置き換えたものを図式とみなし，これを *tangled lattice diagram (TL diagram)* と呼ぶ．

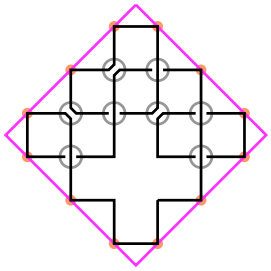
ここで，$V_2, V_4$ はそれぞれ次数 2,4 の頂点を集めた集合である．



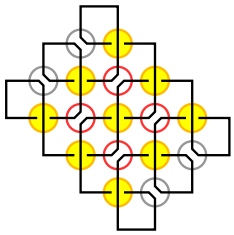

**Definition 2.4.** tangled lattice diagram が下図のように $1 \times 1$ の正方形で構成されているとき，密である と呼ぶ．



**Definition 2.5.** tangled lattice diagram が下図のように長方形で囲われるとき，長方型である と呼ぶ．

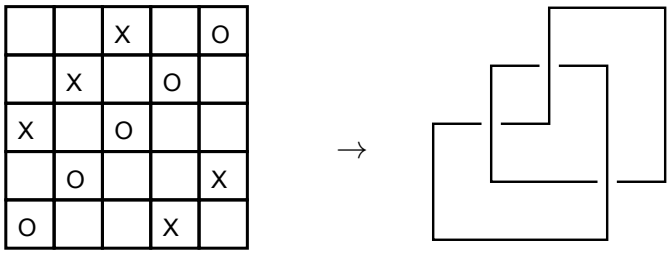


すなわち，CPA diagram は灰色の円では必ずタングル H，黄色の円では必ずタングル X，その他赤色の円では H,I,X いずれかのタングルである密な長方型 TL diagram であると定義される．



次に，証明で用いる diagram を用意する．

**Definition 2.6.** *grid number* $n$ の *grid diagram* とは，各行，各列の格子内には丁度 1 つずつの X と O が配置された $n \times n$ の正方格子から，X と O を繋げて得られる link diagram のことである．(ただし交点は水平方向が下となるように定める)




grid diagram

任意の絡み目は grid diagram で表せることが既に知られているので，先程の定理はこの事実と下記の命題から導き出される．

**Proposition 2.7.** 任意の *grid diagram* は，*link type* を変えずに *CPA diagram* に変形できる．

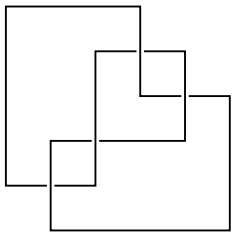
以下，この命題を証明する．

## 3. Idea of Proof

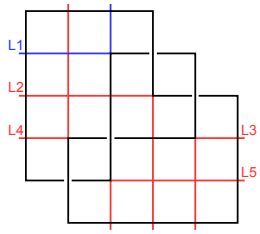
命題の証明は次の 3 段階の構成になっている．

1. 与えられた grid diagram を密な TL diagram に変形する．
2. 密な TL diagram を，密なまま長方型にする．
3. コロイド部分，タングル部分，コロイド部分，… といった規則性を付ける．

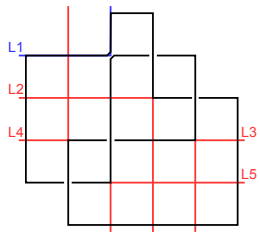
この証明の手順を，実際に 8 の字結び目の grid diagram を変形する例を上げて紹介する．



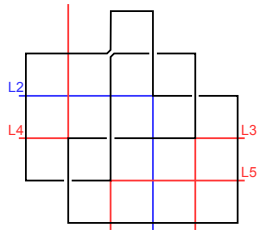
まず与えられた grid diagram にガイドラインを引く．ガイドラインとは，内部の各角から，2 方向の半直線を外にはみ出るまで引いたものである．



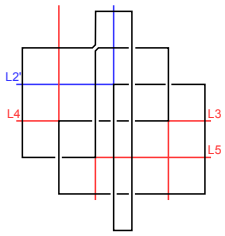

次に，L1 について変形し，L1 をなくす．L1 の垂直部分と他のガイドラインが交わっていないことに注意して L1 で囲われた部分の辺を 1 段下へ平行に降ろす．



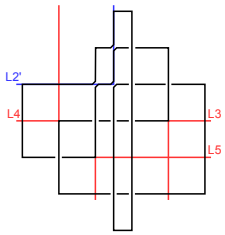

こうすることで L1 を取り除く事が出来る．



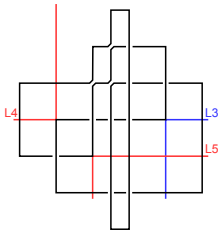

次に，L2 をなくす．L2 が下へのびる半直線をもつ（L2 の垂直部分が下で他のガイドラインと交わっている）ので，上へのびるように変形する．



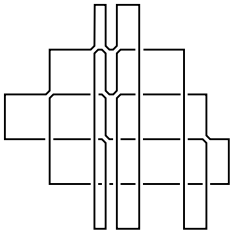

L2 で囲われた部分の辺を 1 段下へ平行に降ろす．



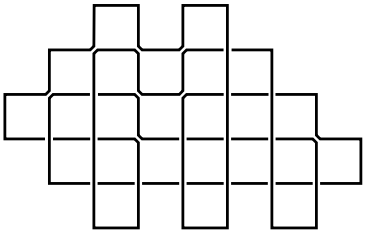

L2 を取り除く．



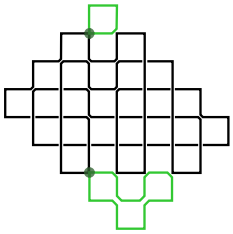

L3 から L5 まで同様に変形し，取り除いていく．必要に応じてガイドラインの向きを上に向ける変形を施す．



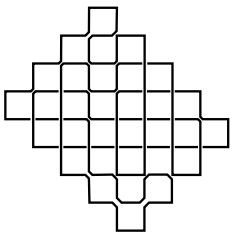
こうして 1 段階目の grid diagram から密な TL diagram への変形が完了した．縮尺を整えると以下の図になる．



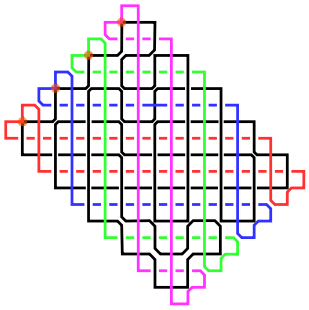
続いて，下図のように 2 点から緑色のループになるように diagram の一部を引き伸ばす．



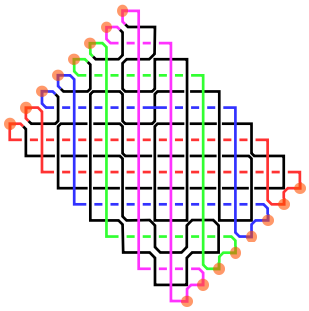
こうして 2 段階目の密な TL diagram を密なまま長方型にする変形が完了した．



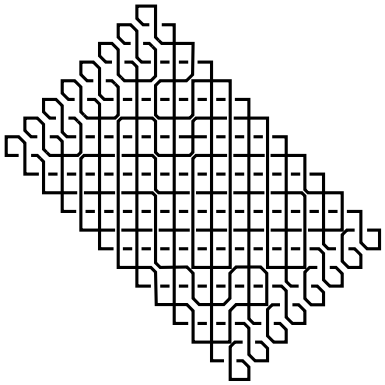
最後に規則性をもたせるために，いまある全ての交点や角の対を，タングル部分にするよう，diagram の一部を引き伸ばし，それを自身に巻き付ける．引き伸ばした部分について，垂直な辺は元の diagram の上を，水平な辺は下を通している．



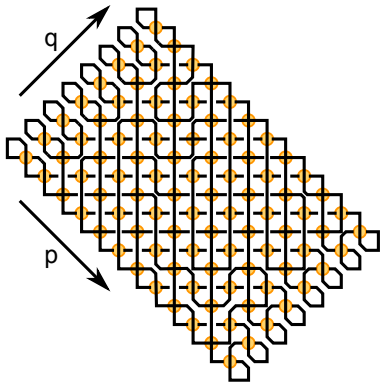
最後に，橙色の所で半捻りを加える．



こうして 3 段階目の規則性を付ける変形が完了した．



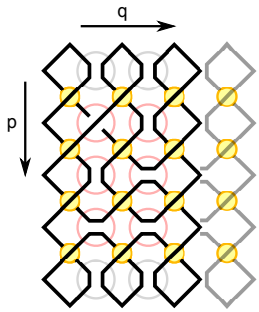
見やすくするためにコロイド部分に円を付け加えると下図の様になる．8 の字結び目は $12 \times 8$ CPA diagram で表される．




以上の手順で，任意の grid diagram は，link type を変えずに CPA diagram に変形できることが示せる．

## 4. Ongoing work

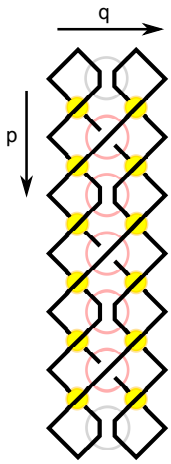
一般的な変形を与えると非常に大きい CPA diagram になってしまう．実際，figure eight knot は $4 \times 3$ CPA diagram で表すことができる．(図の黒の diagram で記された部分) 更に twist knot は右の表示から得ることができる．図では黒の diagram に灰色部分を追加していくことで得られる．




$$\begin{matrix} X & H & \cdots & H \\ H & I & \cdots & I \\ I & I & \cdots & I \end{matrix}$$

figure eight knot CPA diagram

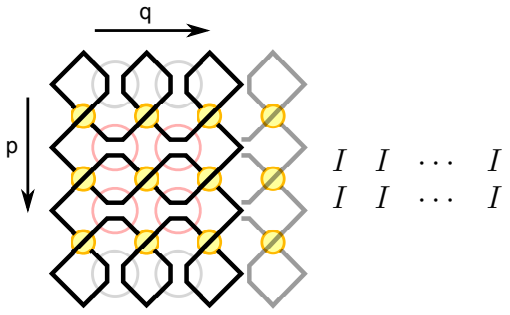
上図で得られる twist knots の鏡像の表示は右下のように行方向へ伸ばすようにして与えられる．左の図は $6 \times 2$ CPA diagram で表した figure eight knot である．




$$\begin{matrix} X \\ H \\ X \\ H \\ \vdots \\ H \\ X \end{matrix} \quad \text{or} \quad \begin{matrix} X \\ H \\ X \\ H \\ \vdots \\ H \\ I \end{matrix}$$

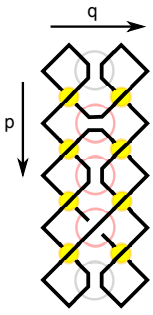
figure eight knot CPA diagram

(2,n)-torus links の表示は以下で表される．特に左手系は $3 \times n$ array で，右手系は clossing number が奇数ならば $(\frac{n+1}{2} + 2) \times 2$ array ，偶数ならば $(\frac{n}{2} + 2) \times 2$ array で与えられる．




$$\begin{matrix} I & I & \cdots & I \\ I & I & \cdots & I \end{matrix}$$

trefoil
($3 \times 3$ CPA diagram)



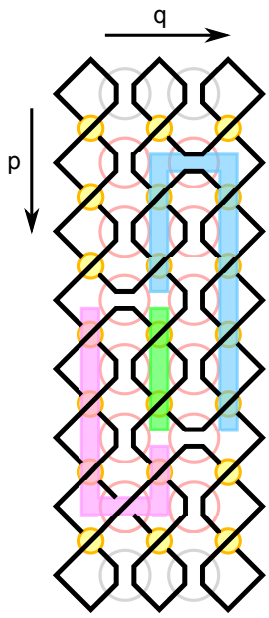

$$\begin{matrix} odd \\ I \\ H \\ \vdots \\ H \\ X \end{matrix} \quad \text{or} \quad \begin{matrix} even \\ I \\ H \\ \vdots \\ H \\ I \end{matrix}$$

trefoil
($4 \times 2$ CPA diagram)

$(n, m, l)$- pretzel links については，$n, l \geq m \geq 1$ ならばその表現を与えることができる．

$(3, 2, 6)$- pretzel link

$(7 \times 3$ CPA diagram)




$$\begin{matrix} H & I \\ H & H \\ I & H \\ H & H \\ H & I \\ X & H \end{matrix}$$

2-bridge knots の表現についても研究を進めている．

## References

[1] Uroš Tkalec, Miha Ravnik, Simon Čopar, Slobodan Žumer, Igor Muševič, Reconfigurable Knots and Links in Chiral Nematic Colloids, Science **333**, 6038 (2011), 62-65.
[2] Randall D.Kamien, Knot Your Simple Defect Lines?, Science **333**, 6038 (2011), 46-47.
[3] 武内佑馬，Knots and Links in Chiral Nematic Colloids，修士論文, 埼玉大学大学院 (2015).