

絡み目の3彩色に関する J. H. Przytycki の公式について

住吉 千波 (神戸大学大学院理学研究科)

概要

J. H. Przytycki は 3 彩色数とカウフマン多項式との関係性を見出したが、明確な証明は与えられていない。本稿では、ゲーリッツ行列を考えることにより、3 彩色数とカウフマン多項式との関係性を証明するのに必要な、命題の証明を行う。

1 導入

J. H. Przytycki は 3 彩色数とカウフマン多項式について、以下のような関係性を見出した。

$$tri(D) = 3|F_L(1, -1)|. \quad (1)$$

そこで Przytycki は式 (1) を証明するために、次の命題を用いた。

命題 1.1. ある射影図の一部を変形してできた、4 種類の射影図 D_+ , D_- , D_0 , D_∞ を考える。図 1 は変形した交点の近傍のみを表しており、点線の外は全く同じ射影図であるとする。

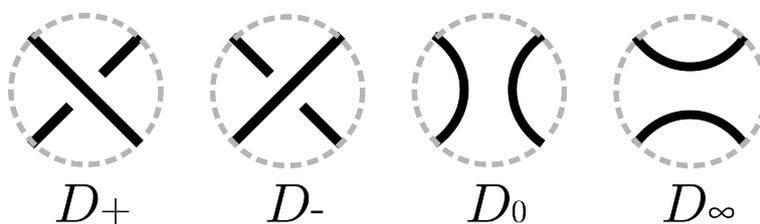


図 1:

このとき、 D_+ , D_- , D_0 , D_∞ に対し、次の (1), (2) が成り立つ。

(1) $tri(D_+)$, $tri(D_-)$, $tri(D_0)$, $tri(D_\infty)$ のうち 3 つは等しく、残りの 1 つも同じか 3 倍である。

(2) $tri(D_+)$, $tri(D_-)$, $tri(D_0)$, $tri(D_\infty)$ のすべてが等しくなることはない。

命題 1.1(1) については、[P] で証明が与えられている。しかし、(2) については証明が記されていない。命題 1.1 は命題 1.2 と同値である。

命題 1.2. $tri(D_+)$, $tri(D_-)$, $tri(D_0)$, $tri(D_\infty)$ のうちちょうど 3 つは互いに等しく、残りの 1 つは他の 3 つの 3 倍である。

今回はゲーリッツ行列を用いて命題 1.1 を証明する。二重分岐被覆空間とゲーリッツ行列の関係を用いた証明は、今後の研究課題である。

2 定義

3彩色数, カウフマン多項式, ゲーリッツ行列の定義を行う.

定義 2.1 (3彩色). 射影図 D に対する **3彩色**とは, それぞれの交点で次の条件 (1), (2) を満たすように3色でアークを塗ることをいう:

- (1) 3色すべてが揃う.
- (2) 1色のみで塗られている.

また, 射影図 D の3彩色の総数を **3彩色数**といい, $tri(D)$ と表す. さらに, 絡み目のすべてのアークが同じ色で塗られているときその塗り方を自明な3彩色であるという. また, 2色以上の色で塗られているとき非自明な3彩色であるという.

定義 2.2 (3彩色可能). 絡み目 L が3彩色可能であるとは, 絡み目 L のある射影図に対して, 非自明な3彩色ができるときをいう.

次の定理はよく知られている.

定理 2.3. 3彩色数 $tri(D)$ は絡み目の不変量である.

定義 2.4 (ねじれ数). 向き付けられた射影図 D の各交点に対して符号 (-1 または $+1$) を次のように定める. それらの合計を D のねじれ数といい, $w(D)$ と表す.

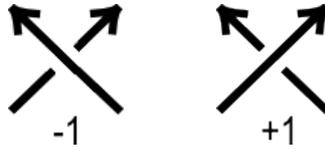


図 2:

定義 2.5 (デルタ多項式). 変数 a, x に対する射影図 D のデルタ多項式 $\Delta(D; a, x) \in Z[a, a^{-1}, x, x^{-1}]$ を次の (1)~(3) で定める:

- (1) $\Delta(\bigcirc) = 1,$
- (2) $\Delta(\nearrow \searrow) + \Delta(\nwarrow \swarrow) = x\{\Delta(\bigcirc) + \Delta(\searrow \swarrow)\},$
- (3) $\Delta(\swarrow \nwarrow) = a\Delta(\smile), \Delta(\nwarrow \swarrow) = a^{-1}\Delta(\smile).$

定義 2.6 (カウフマン多項式). 射影図 D のカウフマン多項式 $F_D(a, x)$ を次式で定める:

$$F_D(a, x) := a^{-w(D)} \Delta(D; a, x).$$

定義 2.7 (ゲーリッツ行列). 絡み目の射影図 D の補領域にチェッカーボード彩色を施す. $\alpha_i (i = 1, 2, \dots, s)$ を白領域全体とし, 図 3 のように各交点に符号を定める. このとき, $g_{ij} (i \neq j)$ を α_i と α_j の間の交点の符号の和とし, g_{ii} を $g_{ii} = -\sum_{j \neq i} g_{ij}$ とする. このとき成分 g_{ij} をもつ行列 $(g_{ij})(i, j = 1, 2, \dots, s)$ を D のゲーリッツ行列という.

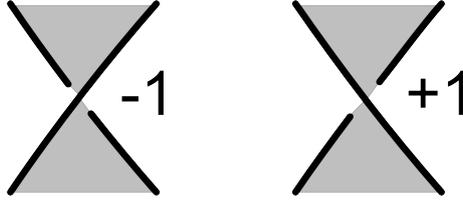


図 3:

3 命題 1.2 の証明

整数を成分とする s 次正方行列 G に対して, G の成分を $\text{mod } 3$ で考えたときの G の rank と corank を $\text{rank}_3(G)$, $\text{corank}_3(G)$ と書く. ただし, $\text{corank}_3(G) = s - \text{rank}_3(G)$ である.

3 彩色数とゲーリッツ行列について, 以下のような関係があることが知られている.

補題 3.1. 連結な射影図 D のゲーリッツ行列 G が s 次正方行列であるとき,

$$\text{tri}(D) = 3^k$$

が成り立つ. ただし, $k = \text{corank}_3(G)$ とする.

例 3.2. 図 4 のようにチェッカーボード彩色を施した射影図 D を考える. 白領域を $\alpha_i (i = 1, 2, 3)$ とする.

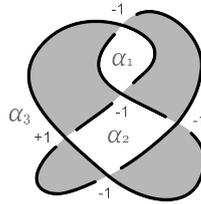


図 4:

このとき, D のゲーリッツ行列 G に基本変形を施すと次のようになる.

$$G(D) = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

このときゲーリッツ行列 G について, $\text{rank}_3(G) = 1$, および $\text{corank}_3(G) = 3 - 1 = 2$ である. 一方, D は trefoil knot を表しているので, $\text{tri}(D) = 9 = 3^2$ が成り立つ.

補助定理 3.1 を用いると, 命題 1.2 は命題 3.3 と同値であることがわかる.

命題 3.3. G_+ , G_- , G_0 , G_∞ をそれぞれ D_+ , D_- , D_0 , D_∞ に対するゲーリッツ行列とする. このとき, $\text{corank}_3(G_+)$, $\text{corank}_3(G_-)$, $\text{corank}_3(G_0)$, $\text{corank}_3(G_\infty)$ のうちちょうど 3 つは等しく, 残りの 1 つは他の 3 つより 1 大きい.

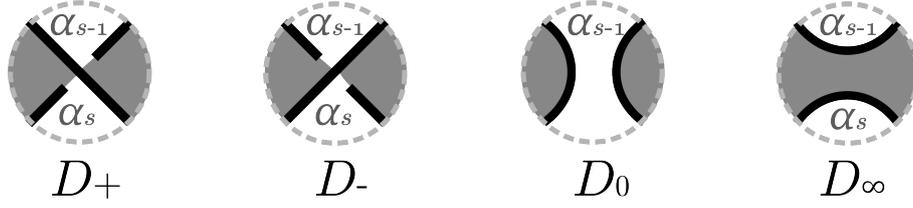


図 5:

証明. D_∞ にチェッカーボード彩色を施し, その白領域を α_i ($i = 1, 2, \dots, s, s-1$) とする. ただし, α_{s-1}, α_s を図 5 のようにとる. $\alpha_{s-1} = \alpha_s$ のときも同様に示せるので, 以下, $\alpha_{s-1} \neq \alpha_s$ とする.

また, D_+, D_-, D_0 に対して, 点線の外側は全く同じになるようにチェッカーボード彩色を施し, 対応する白領域にも同じ記号をつける. ただし D_0 に関しては, 2 つの領域が 1 つになるので, それを α_{s-1} とする.

ここで D_∞ のゲーリッツ行列を

$$G_\infty = \left(\begin{array}{c|cc} M & v_1 & v_2 \\ \hline {}^t v_1 & a & b \\ {}^t v_2 & b & c \end{array} \right)$$

とする. ただし, M は $(s-2)$ 次正方行列, v_1, v_2 は $(s-2) \times 1$ の行列を表す. このとき, G_+, G_-, G_0 は次のようになる.

$$G_+ = \left(\begin{array}{c|cc} M & v_1 & v_2 \\ \hline {}^t v_1 & a-1 & b+1 \\ {}^t v_2 & b+1 & c-1 \end{array} \right), G_- = \left(\begin{array}{c|cc} M & v_1 & v_2 \\ \hline {}^t v_1 & a+1 & b-1 \\ {}^t v_2 & b-1 & c+1 \end{array} \right), G_0 = \left(\begin{array}{c|c} M & v_1 + v_2 \\ \hline {}^t v_1 + {}^t v_2 & a + 2b + c \end{array} \right).$$

以下, これらの $rank$ を求める.

(1) G_∞ について: ゲーリッツ行列の各行, 各列の成分の和が 0 であるという性質から, 1 行目 $\sim s-1$ 行目を s 行目に加えて s 行目を 0 にする. 列に対しても同様の変形を施す. そして, M を対角化する.

$$G_\infty = \left(\begin{array}{c|cc} M & v_1 & v_2 \\ \hline {}^t v_1 & a & b \\ {}^t v_2 & b & c \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{c|cc} M & v_1 & 0 \\ \hline {}^t v_1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & 0 \\ & & & 0 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 0 \\ \hline & & & & & v'_1 & 0 \\ & & & & & a & 0 \\ & & & & & 0 & 0 \end{array} \right).$$

さらに M の対角成分を利用して $s-1$ 行および $s-1$ 列に基本変形を施すと, 次の行列が得ら

れる.

$$G_\infty \sim \left(\begin{array}{cccccccc|cc} 1 & & & & & & & & 0 & 0 \\ & \ddots & & & & & & & \vdots & \vdots \\ & & 1 & & & & & 0 & 0 & \vdots \\ & & & 0 & & & & & 1 & \vdots \\ & & & & \ddots & & & & \vdots & \vdots \\ & & & & & 0 & & & 1 & \vdots \\ & & 0 & & & & & & 0 & \vdots \\ & & & & & & & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & & & & & & & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 & a' & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

ここで, $(1,1) \sim (s-2, s-2)$ の対角成分の 0 の個数を p , $s-1$ 列の 1 行目 \sim 2 行目に並んだ 1 の個数を q する. q の値によって場合分けを行う.

(i) $q=0$ のとき, 以下のようになる.

$$G_\infty \sim \left(\begin{array}{cccccccc|c} 1 & & & & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & & & & \vdots \\ & & 1 & & & & & & \vdots \\ & & & 0 & & & & & \vdots \\ & & & & \ddots & & & & \vdots \\ & & & & & 0 & 0 & & \vdots \\ & & & & & & & 0 & 0 \\ \hline 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & a' \end{array} \right).$$

よって,

$$\text{corank}_3(G_\infty) = \begin{cases} p+2 & (a' \equiv 0 \pmod{3}), \\ p+1 & (a' \not\equiv 0 \pmod{3}). \end{cases}$$

(ii) $q > 0$ のとき, $s-1$ 行および $s-1$ 列の 1 を利用して基本変形を施すと, 以下のようになる.

$$G_\infty \sim \left(\begin{array}{cccccccc|c} 1 & & & & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & & & & \vdots \\ & & 1 & & & & & & 0 \\ & & & 0 & & & & & 1 \\ & & & & \ddots & & & & 0 \\ & & & & & \ddots & & & \vdots \\ & & & & & & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

よって,

$$\text{corank}_3(G_\infty) = p.$$

(2) G_+ について : G_∞ のときと同様の基本変形を施すと,

$$G_+ \sim \left(\begin{array}{cccccccc|cc} 1 & & & & & & & & 0 & 0 \\ & \ddots & & & & & & & \vdots & \vdots \\ & & 1 & & & & & & 0 & \vdots \\ & & & 0 & & & & & 1 & \vdots \\ & & & & \ddots & & & & \vdots & \vdots \\ & & & & & 0 & & & 1 & \vdots \\ & & 0 & & & & & & 0 & \vdots \\ & & & & & & & & \vdots & \vdots \\ & & & & & & & & 0 & 0 \\ & & & & & & & & 0 & 0 \\ \hline 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 & a'-1 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

となる. よって,

(i) $q = 0$ のとき,

$$\text{corank}_3(G_+) = \begin{cases} p+2 & (a' \equiv 1 \pmod{3}), \\ p+1 & (a' \not\equiv 1 \pmod{3}). \end{cases}$$

(ii) $q > 0$ のとき,

$$\text{corank}_3(G_+) = p.$$

(3) G_- について : G_∞ のときと同様の基本変形を施すと,

$$G_- \sim \left(\begin{array}{cccccccc|cc} 1 & & & & & & & & 0 & 0 \\ & \ddots & & & & & & & \vdots & \vdots \\ & & 1 & & & & & & 0 & \vdots \\ & & & 0 & & & & & 1 & \vdots \\ & & & & \ddots & & & & \vdots & \vdots \\ & & & & & 0 & & & 1 & \vdots \\ & & 0 & & & & & & 0 & \vdots \\ & & & & & & & & \vdots & \vdots \\ & & & & & & & & 0 & 0 \\ & & & & & & & & 0 & 0 \\ \hline 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 & a'+1 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

となる. よって,

(i) $q = 0$ のとき,

$$\text{corank}_3(G_-) = \begin{cases} p+2 & (a' \equiv 2 \pmod{3}), \\ p+1 & (a' \not\equiv 2 \pmod{3}). \end{cases}$$

(ii) $q > 0$ のとき,

$$\text{corank}_3(G_-) = p.$$

(4) G_0 について : 1 行 (列) 目 $\sim s-2$ 行 (列) 目を $s-1$ 行 (列) 目に加えて $s-1$ 行 (列) 目を 0 にする. そして, M を対角化する. さらに M の対角成分を利用して $s-1$ 行および $s-1$ 列に基本変形を施すと, 次の行列が得られる.

$$G_0 = \left(\begin{array}{c|c} M & v_1 + v_2 \\ \hline {}^t v_1 + {}^t v_2 & a + 2b + c \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{c|c} M & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 0 & \\ & 0 & & \ddots & \\ & & & & 0 \\ \hline & & & & 0 \end{array} \right).$$

よって,

$$\text{corank}_3(G_0) = p + 1.$$

以上をまとめると, $q = 0$ のとき $\text{corank}_3(G_+)$, $\text{corank}_3(G_-)$, $\text{corank}_3(G_\infty)$ のうち 1 つが $p+2$, 残り 2 つと $\text{corank}_3(G_0)$ が $p+1$ となる. また, $q > 0$ のとき $\text{corank}_3(G_+) = \text{corank}_3(G_-) = \text{corank}_3(G_\infty) = p$, $\text{corank}_3(G_0) = p+1$ となる.

□

4 p 彩色の場合

一般の p 彩色について, 命題 4.1 が成り立つ. これは命題 3.3 の一般化である.

命題 4.1. [P] $p+1$ 個の射影図 $D_0, D_1, D_2, \dots, D_{p-1}, D_\infty$ を図 6 のようにとる. ただし, それらは図に示されている一部を除いて全く同じ射影図であるとする. このとき, それらの p 彩色数のうち, ちょうど p 個は等しく, 残りの 1 つは他の p 個の p 倍である.

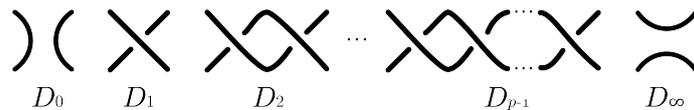


図 6:

参考文献

- [P] J. H. Przytycki, 3-coloring and other elementary invariants of knots. Knot theory (Warsaw, 1995), 275 ? 295, Banach Center Publ., 42, Polish Acad. Sci., Warsaw, 1998.
- [B] G. Burde and H. Zieschang, Knots. de Gruyter Studies in Mathematics, 5. Walter de Gruyter & Co., Berlin, 1985.
- [K] 河内 明夫, レクチャー結び目理論, 共立出版株式会社, 2007.