大黒-境-高瀬の結び目図式変形の絡み目への拡張

佐藤晶彦
名古屋大学大学院多元数理科学研究科前期課程 2 年

概要

2012 年の論文で大黒-境-高瀬は, 与えられた結び目の図式から得られるSeifert 曲面の種数を結び目の型を変えずに減少させる操作を与えた. 本報告書では彼らの議論を分離可能でない絡み目の場合に拡張する.

1 主定理

Turaev が文献 [6] で構成した knotoid diagram と平面上の multi-knotoid diagram[*1] は以下のように書ける. 通常の向きが付けられた $[0,1]$ または $[0,1] \sqcup S^1 \sqcup \cdots \sqcup S^1$ から $\mathbb{R}^2$ への generic immersion f で 2 重点が上下の情報を持つものを *multi-knotoid diagram* と呼ぶ. 端点 $f(0), f(1)$ はそれぞれ multi-knotoid diagram の *leg, head* と呼ぶ.

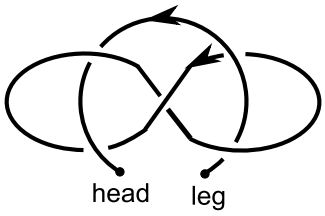

図 1 multi-knotoid diagram

大黒-境-高瀬が文献 [1] で構成した Daikoku move とよばれる結び目図式変形を絡み目に対して定義する.

Definition 1.1 (cf.[1])**.** L を分離可能でない m 成分の有向絡み目, D を L の図式, B を D の over bridge とする. (D, B) に対する *Daikoku move* とは over bridge B を over bridge $\tilde{B}$ に以下のように置き換える操作である：

[*1] 口頭発表時は一般化 knotoid 図式と呼んでいたが, 発表後に成蹊大学の高瀬将道先生の御指摘をうけ, 文献 [6] を読み直して本稿では変更した.

D から B を除いて得られる平面上の multi-knotoid diagram D_B° に対し，P, Q をそれぞれ D_B° の leg, head とする．J を D_B° から得られる向き付けられた Seifert interval とする．D_B° には P から Q へ向きがつけられている．Q から P への向きが付けられた bridge $\tilde{B}$ を J の右側を J に沿ってたどることで構成する．但しスプライス後に J を構成する各弧に対する over pass は許す．

Example 1.1. 図 2 において D は左端の図で表される図式である．(D, B) に対する Daikoku move を考える．図 2 の左から 3 番目の図は D_B° にスプライスを施したものである．右端の図は $\tilde{D_B}$ である．

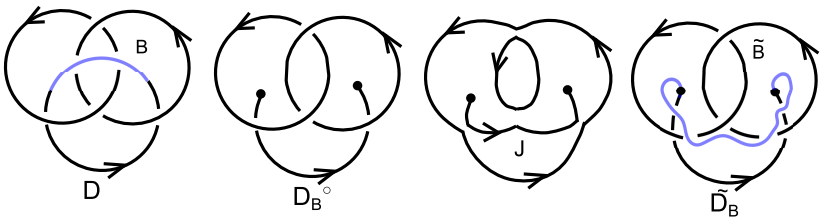

図 2

以下, 絡み目図式 D に対し, $S(D)$ を D に Seifert のアルゴリズムを適用して得られる canonical な Seifert 曲面とする．

分離可能でない絡み目の図式に対する Daikoku move に関して以下が成り立つということが得られた．

Theorem 1.1. L を分離可能でない有向絡み目とし，D を L の絡み目図式, B を D の over bridge とすると, 次が成り立つ：

$$g(S(\tilde{D_B})) \leq g(S(D)).$$

結び目の場合は大黒-境-高瀬によって文献 [1] で示されている．

2 絡み目の Gauss 図式とそのサイクル

主定理の証明には Gauss 図式を用いた議論が含まれるので, この章でふれる．

Definition 2.1 (cf.[2])**.** *Gauss* 図式とは, 向き付けられた円たちに符号と向きをもった n 本のコードをつけたものである．n 個の crossings を持つ m 成分の絡み目 L の絡み目図式 D に対して, n 本のコードと m 個の円をを持つ Gauss 図式 G_D を以下のようにしてとることができる：

1. D の各 crossing の逆像をコードでつなぐ.

2. over pass から under pass へ向かうようにコードの向きをつける.

3. 対応する crossing の正負に従い符号をつける.

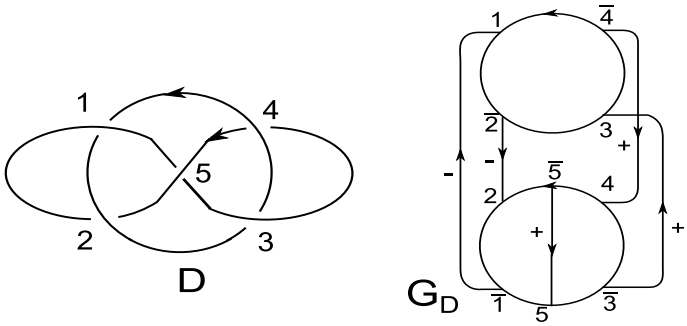

図 3　絡み目図式 D と対応する Gauss 図式 G_D

Definition 2.2 (cf.[1])**.** G を Gauss 図式とする. G の **サイクル**とは次の手順を繰り返して得られるもののことである：

0. C を G のあるコードとし, C の端点 x から始める.

1. コード C に沿って C のもう一方の端点に進む. コードの向きに逆らってもよい.

2. 円周の向きに沿って隣接する端点 y に進む.

3. y から初めて $1, 2$ を繰り返す.

4. 2 で x に戻ってきたら終了.

但しコードのない円もサイクルとして認める.

Definition 2.2 の操作で Gauss 図式 G のどのコードの端点から始めても必ずサイクルが構成できることを示しておく.

G の円の数についての帰納法で示す. 1 個の場合は文献 [1] で認めている. G の円の数が m 個以下のときサイクルをたどる操作が完了するとする. G の円の数が $m+1$ 個であると仮定する.

すべての円が他の円のいずれかとコードでつながっているとき, G の円を 1 個とり S_1^1 とする. S_1^1 と, S_1^1 以外の円のいずれかをつなぐコードを 1 個とり C とする. S_1^1 とコード C でつながっている円を S_2^1 とする. コード C の端点をそれぞれ x_1, x_2 とする. C のまわりを図 4 のようにかきかえて得られる Gauss 図式を G' とする. G' の円の数は, 構成の仕方から m 個である. よって帰納法の仮定から G' のどのコードの端点から始めてもサイクルをたどる操作は完了する. G のサイクルと G' のサイク

ルは始点の選び方を無視すれば一対一に対応する．従って G の円の数が $m+1$ 個のときもサイクルの構成のための操作は完了する．

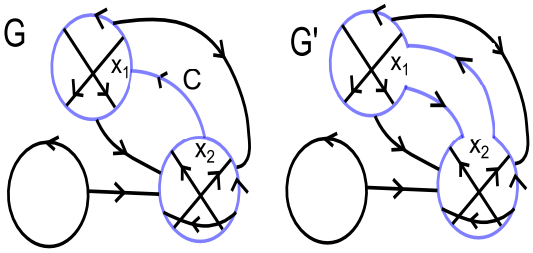

図 4

3 Gauss diagram の種数

Definition 3.1 (cf.[4])**.** 与えられた Gauss 図式 G の *canonical* な曲面 Σ_G とは，図のように G を「太らせて」得られる有向曲面 $\Sigma_G^{'}$ に，すべてのサイクルに沿って円板を貼り合せて得られる曲面である．G を「太らせる」際，コードは円の内側についていると解釈する．

Example 3.1. 図 5 は Gauss 図式 G に対して構成した $\Sigma_G^{'}$ である．$\Sigma_G^{'}$ に対し，すべてのサイクルに沿って円板を貼り合せると境界成分数が 2 の曲面 Σ_G が得られる．

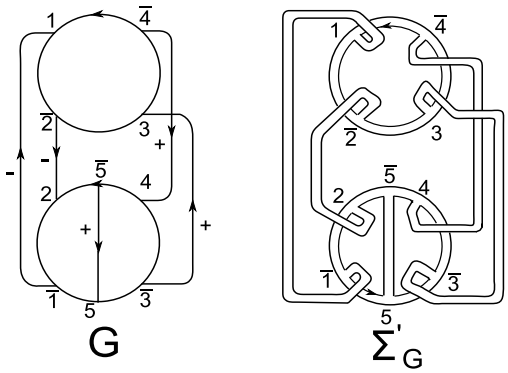

図 5

Lemma 3.1 (cf.[4])**.** G を 円が m 個，コードが n 本の Gauss 図式，s_G を G のサイクルの数，α を G の canonical な曲面 Σ_G の連結成分数とする．Σ_G の種数 $g(\Sigma_G)$ について次が成り立つ：

$$g(\Sigma_G) = \frac{1}{2}(n - s_G - m) + \alpha.$$

証明は文献 [1] と同様にしてできる．また, 以下が成り立つ.

Lemma 3.2 (cf.[4])**.** D を絡み目図式, G_D を D から得られる Gauss 図式とすると次が成り立つ：

$$g(S(D)) = g(\Sigma_{G_D}).$$

この Lemma が成り立つことで絡み目図式についての問題を Gauss 図式を使って考えることができる.

Lemma 3.3 (cf.[1])**.** G を Gauss 図式とする．C を G のコードとする．*Gauss* 図式 G' を $G \setminus C$ で与える．このとき $g(\Sigma_{G'}) \leq g(\Sigma_G)$ が成り立つ.

Proof. 以下 n を G のコードの数, s_G を G のサイクルの数, m を G の円の数, α を G の連結成分数とする．G' の円の数は m, コードの数は $n-1$ となる．よって Lemma 3.1 より, 除いたコード C のサイクルへの現れ方による G と G' の連結成分数とサイクルの数の変化を調べればよい．今, G' の連結成分数は α または $\alpha+1$ となる.

G' の連結成分数が $\alpha+1$ となる場合を考える．C の端点を a, b とする．文献 [1] と同様に 1 個のコードに対して, それを通るサイクルは 1 個または 2 個存在する．G' の連結成分数が $\alpha+1$ であるので C を通るサイクルは 1 個存在する．端点 a から始めるとサイクルは $a, b, \omega_1, b, a, \omega_2, a$ の順でたどることができる．但し ω_1, ω_2 は a, b を含まないある文字列とする．文字列 ω_i の始点を $f(\omega_i)$, 終点を $l(\omega_i)$ とする ($i = 1, 2$)．このとき各点は図 6 の右端のようになっている．コード C を取り除くと $a, b, \omega_1, b, a, \omega_2, a$ で構成される G のサイクルは ω_1, ω_2 それぞれで構成される G' の 2 個のサイクルに分かれる．よって G' のサイクルの数は s_G+1 となる.

ω_1 が空のとき各点は図 6 の左端のようになる．ω_1, ω_2 の両方が空のとき各点は図 6 の中央のようになる．ω_2 が空のときも ω_1 が空のときと同様に考えられるので, ω_1 または ω_2 が空のときは今考えている場合に含まれる．ω_1 が空のときと, ω_1, ω_2 の両方が空のときコード C を除くと a, b, b, a, ω_2, a で構成される G のサイクルは ω_2 で構成される G' のサイクルとコードを持たない円に分かれ, a, b, b, a, a で構成される G のサイクルは G' のコードを持たない円 2 個に分かれる．Gauss 図式中のコードを含まない円もサイクルである．よってそれぞれの場合で G' のサイクルの数は s_G+1 となる．ω_2 が空のときも同様.

以上と Lemma 3.1 から

$$
\begin{aligned}
g(\Sigma_{G'}) &= \frac{1}{2}\{(n-1)-(s_G+1)-m\}+\alpha+1 \\
&= \frac{1}{2}(n-s_G-m)+\alpha+1-1 \\
&= g(\Sigma_G)
\end{aligned}
$$

となる.

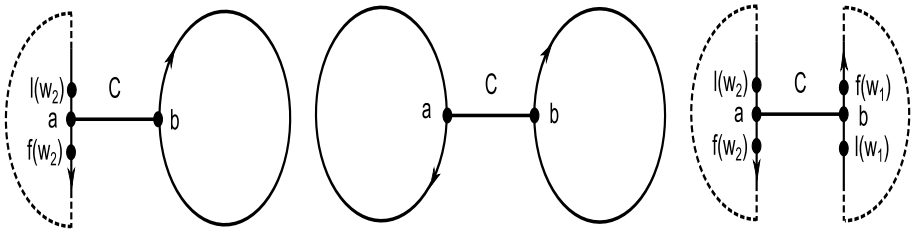

図 6

G' の連結成分数が α となる場合を考える. この場合は文献 [1] と同様にして示すことができるので詳細は省略する.

1. C を通るサイクルが 1 個存在するとき, G' のサイクルの数は s_G+1 となる. よって Lemma 3.1 から

$$
\begin{aligned}
g(\Sigma_{G'}) &= \frac{1}{2}\{(n-1)-(s_G+1)-m\}+\alpha \\
&= \frac{1}{2}(n-s_G-m)+\alpha-1 \\
&= g(\Sigma_G)-1 < g(\Sigma_G)
\end{aligned}
$$

となる.

2. C を通るサイクルが 2 個存在するとき, G' のサイクルの数は s_G-1 となる. よって Lemma 3.1 から

$$
\begin{aligned}
g(\Sigma_{G'}) &= \frac{1}{2}\{(n-1)-(s_G-1)-m\}+\alpha \\
&= \frac{1}{2}(n-s_G-m)+\alpha \\
&= g(\Sigma_G)
\end{aligned}
$$

となる.

□

4　主定理の証明の概略

Definition 4.1 ([6])**.** multi-knotoid diagram D° に対し次の操作を施す：

1. D° を $\mathbb{R}^2 \times \{0\} \subset \mathbb{R}^3$ 内に埋め込む.
2. 各交差点にスプライスを施す. いくつかの埋め込まれた S^1（ *Seifert* 円周 と呼ぶ）と Seifert interval J の disjoint union が得られる. J は D° と同じ端点 x, y をもつ.
3. $\mathbb{R}^2 \times [0, \infty)$ 内にある円板を各 Seifert 円周に張る. $\mathbb{R}^2 \times (-\infty, 0]$ 内にバンド $J \times [0,1]$ を $(\mathbb{R}^2 \times \{0\}) \cap (J \times [0,1]) = J \times \{0\} = J$ となるようにとる.
4. D° の各交差点に半ひねりバンドをつける.

この結果できた曲面 $S(D^\circ)$ を D° の *canonical* な曲面とよぶ. $S(D^\circ)$ の境界は D° と $(J \times \{1\}) \cup (\{x, y\} \times [0,1])$ の和集合で表される S^1 の $\mathbb{R}^3$ への埋め込みである.

Example 4.1. 図 7 の左端は multi-knotoid diagram の一例である. この multi-knotoid diagram について canonical な曲面を Definition 4.1 における操作 *1,2,3,4* に従って構成したのが図 7 である.

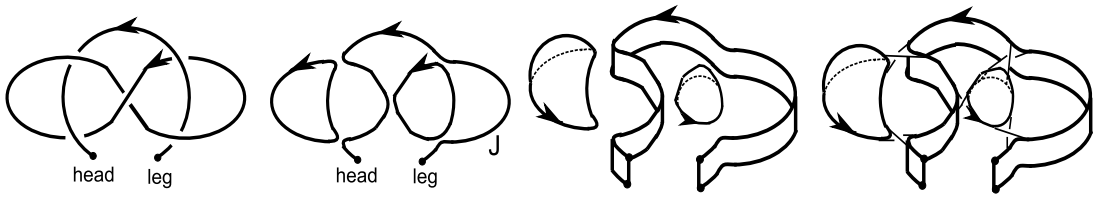

図 7

Definition 4.2 (cf.[1])**.** multi-knotoid diagram D° の種数 $g(D^\circ)$ を canonical な曲面 $S(D^\circ)$ の種数で定義する.

Lemma 4.1 (cf.[1])**.** L は分離可能でない m 成分の有向絡み目とし, D を L の絡み目図式, B を D の over bridge とすると, $g(S(\tilde{D_B})) = g(D_B^\circ)$ が成り立つ.

Definition 4.3 (cf.[4])**.** $D_B^\bullet$ を D で B の crossings を virtual crossings にしたもの, $G_{D_B^\bullet}$ を G_D から B の crossings に対応するコードを除いたもの, $g(D_B^\bullet)$ を $G_{D_B^\bullet}$ の canonical な曲面の種数でそれぞれ定義する.

Lemma 4.2 (cf.[1])**.** $D_B^\bullet$ の Gauss 図式の連結成分数と D_B° の連結成分数がともに 1 のとき $g(D_B^\circ) = g(D_B^\bullet)$ が成り立つ.

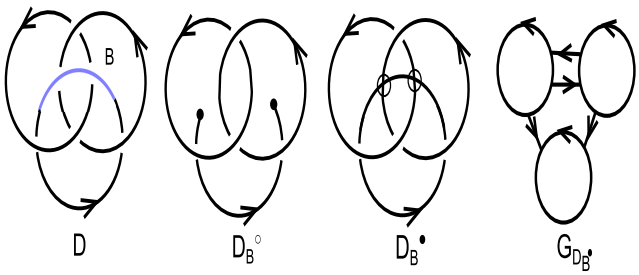

図 8

以上を用いて Theorem1.1 の証明をする.

Theorem 1.1 **の証明．** Lemma 3.2 より $g(S(D)) = g(\Sigma_{G_D})$ である．また Lemma 3.3 から $g(D_B^{\bullet}) \leq g(\Sigma_{G_D})$ である．一方 Lemma 4.2 より $g(D_B^{\bullet}) = g(D_B^{\circ})$ である．さらに Lemma 4.1 から $g(D_B^{\circ}) = g(S(\tilde{D_B}))$ である．従って $g(S(\tilde{D_B})) \leq g(S(D))$ となる． □

以上で述べた議論は over bridge の部分を under bridge に変えても同様にできる.

謝辞． 今回講演の機会を与えて頂いた東京女子大学の大山淑之先生, 新國亮先生, 関係者の方々に感謝いたします．また本報告書を作成するに当たり, multi-knotoid diagram 等に関する適切な引用について御助言頂いた成蹊大学の高瀬将道先生, 御指導頂いた川村友美先生, 米澤康好先生に感謝いたします.

参考文献

[1] K.Daikoku, K.Sakai, M.Takase, On a move reducing genus of a knot diagram, Indiana Univ.Math.J.61(2012), no.3, 1111-1127.

[2] Michael Polyak and Oleg Viro, Gauss Diagram Formulas for Vassiliev Invariants, International Mathematics Research Notices 1994, No. 11, 445-453.

[3] 佐藤晶彦, 大黒-境-高瀬の結び目図式変形の分離可能でない絡み目への拡張, 名古屋大学大学院多元数理科学研究科修士論文, 2015

[4] A.Stoimenow, V.Tchernov, and A.Vdovina, The canonical genus of a classical and virtual knot, Proceedings of the Conference on Geometric and Combinatorial Group Theory, Part II (Haifa, 2000), Vol95,2002,pp.215-225

[5] 鈴木晋一, 結び目理論入門, サイエンス社,1991.

[6] V.Turaev, Knotoids, Osaka J. Math. 49(2012), no. 1, 195-223.