

Impossibility of embeddings of 2-dimensional complexes into the 3-sphere

衛藤 和文 (日本工業大学共通教育系)
松崎 尚作 (早稲田大学大学院教育学研究科)
小沢 誠 (駒沢大学総合教育研究部)

概要

3次元球面に埋め込まれた2次元CW複体に対して, その双対グラフを求め, 双対グラフ補空間の1次元ホモロジー群において, 2次元CW複体から同次連立1次方程式を得る. この同次連立1次方程式が整数解を持たないことを用いて3次元球面に埋め込めない2次元CW複体の無限系列の一例を与える. なお, 例にあげる複体において, 任意の1点を除いた部分空間は3次元球面に埋め込み可能(臨界的)である.

本稿を通じて, PLカテゴリーで考える.

1. はじめに

1次元CW複体が S^2 に埋め込み不可能である為の必要十分条件は, クラトウスキーの定理としてよく知られている.

定理 [K. Kuratowski (1930)]. G を1次元CW複体とするとき, 以下は同値である.

1. G は S^2 に埋め込めない.
2. G は, 部分空間として $K_{3,3}$ もしくは, K_5 を含む.

この結果を2次元CW複体に拡張すること, より具体的には, 2次元CW複体が S^3 に埋め込み不可能である為の必要十分条件を探ることが本研究の最終的な目標である. なお, S^4 に埋め込めない2次元CW複体が存在する[1]ことから, 2次元CW複体が S^4 に埋め込み不可能であるための必要十分条件等も考えられるが, 本研究においては, その場合は考えないこととする.

2. n 次元CW多様体的複体

定義 2.1. 位相空間 X が, 非交和 $X = \bigcup_{q=0}^n \left(\bigcup_{i \in I_q} e_i^q \right)$ と表され, 以下の条件を満たすとき, X を n 次元CW多様体的複体, e_i^q を n 次元多様体的セルという.

1. 境界を持つ向き付け可能コンパクト連結 n 次元多様体 M_i^q から X への連続写像の族 $\{f_i^q : M_i^q \rightarrow X\}$ が存在して,

(a) $f_i^q|_{\text{int}M_i^q} : \text{int}M_i^q \rightarrow e_i^q$ が同相写像であり,

(b) $f_i^q(\partial M_i^q) \subset \bigcup_{p=0}^{q-1} \left(\bigcup_{i \in I_p} e_i^p \right)$ を満たす.

2. 各多様体的セルの閉包は, 有限個の多様体的セルと交わる.

3. $F \subset X$ が閉であることの必要十分条件は、各 e_i^q に対して、 $(f_i^q)^{-1}(F) \subset M_i^q$ が閉であることである。

また、2次元 CW 多様体的複体 X の 1 骨格 $X^1 = \bigcup_{q=0}^1 \left(\bigcup_{i \in I_q} e_i^q \right)$ が単純閉曲線 (以後、分岐と呼ぶ) の非交和 $l_1 \cup \dots \cup l_n$ と同相であり、 $f_i^2|_{\partial M_i^2}$ が被覆写像であるとき、 X を正則という。CW 多様体的複体は CW 複体の拡張であり、逆に、CW 多様体的複体は、各多様体的セルを適当に分割することで、CW 複体とみなせることに留意する。

定義 2.2. 正則な 2次元 CW 多様体的複体 X に対し、分岐 l_j における 2次元セル e_i の代数的次数 (写像度)、 $ad_{e_i}(l_j)$ を次のように定義する。

$H_1(l_j; \mathbb{Z})$ において、

$$ad_{e_i}(l_j)[l_j] := (f_i^2)_* \left([\partial M_i^2 \cap f_i^{-1}(l_j)] \right)$$

ここで、 $(f_i^2)_*$ は、連続写像 $f_i^2: M_i^2 \rightarrow X$ が誘導する準同型写像とする。

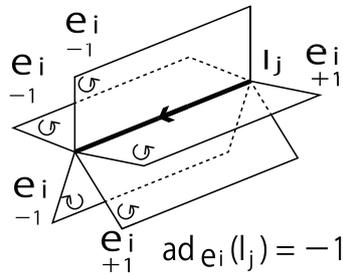


図 1: 代数的次数.

3. 主定理

定理 3.4. において、正則な 2次元 CW 多様体的複体が S^3 に埋め込み不可能である為の十分条件を与える。そのためにいくつかの用語の準備をする。

正則な 2次元 CW 多様体的複体を、3次元多様体に埋め込むとき、以下の図の様に、分岐に接続する 2次元多様体的セルの円順列の分、埋め込み方に違いが生じる。

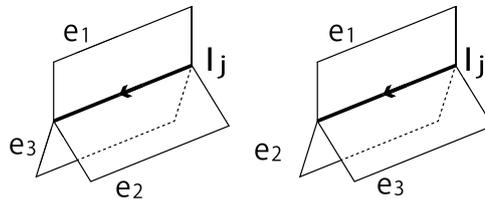


図 2: l_j に、3つのセルが接続している場合.

各分岐において、接続する 2次元多様体的セルの円順列を指定したとき、次の様な操作で、有向グラフを構成することができる。

定義 3.1. X を正則な 2次元 CW 多様体的複体とする。

Step1. 各分岐において、接続するセルの円順列を一つ固定する。

Step2. 各 2次元多様体的セル e_i の直積 $e_i \times [-1, 1]$ をとり、 $e_i^\pm := e_i \times \{\pm 1\}$ とおく。

Step3. 各分岐において、セルの指定された円順列に対応するように、 e_i のコピーである e^\pm を境界で張り合わせることで有限個の連結閉曲面を得るが、それを R_1, R_2, \dots, R_t とおく。

この状況の下で、以下の要領で有向グラフを構成する。

頂点：各 R_j に対し、頂点を v_j とする。

辺：各 e_i に対し、 $e_i^+ \subset R_j$ かつ $e_i^- \subset R_k$ の時、 v_k から v_j へ有向辺を繋ぎ e_i^* とする。

この操作で得られる（分岐におけるセルの円順列に応じて決まる）有向グラフの一つ一つを、 X の**抽象的双対グラフ**と呼ぶ。

定義 3.3. X を正則な2次元CW多様体的複体とする。 G_X を、その抽象的双対グラフのひとつとし、 T を G_X の全域木のひとつとする。 T に属さない G_X の辺 e_1^*, \dots, e_m^* に対応する2次元多様体的セルを e_1, e_2, \dots, e_m とおき、 (m, n) 型代数的次数行列 $A_T = (a_{ij})$ を以下の様に定める。（ m は G_X の1次元Betti数、 n は X の分岐数と対応している。）

$$a_{ij} := ad_{e_i}(l_j).$$

定理 3.4. 連結な2次元正則CW多様体的複体 X から得られる任意の抽象的双対グラフ G_X が以下の(1)または(2)を満たすとき、 X は S^3 に埋め込み不可能である。ただし、 m は G_X の1次元Betti数、 n は分岐数であるとする。

1. $m > n$.
2. $m \leq n$ かつ、 G_X の全域木 T が存在して、その代数的次数行列 A_T の全ての m 次小行列式の最大公約数の絶対値が2以上である。

定理の証明の為、以下の補題を用意しておく。

補題. A を (m, n) 型の整数行列とするとき、以下は同値である。

- (i) 整数行列 B が存在して、 $AB = E$ である。
- (ii) $m \leq n$ かつ、 A の全ての m 次小行列式の最大公約数が1である。

定理 3.4. の証明. X が S^3 に埋め込めたと仮定し、 G_X をその幾何学的双対グラフとする。（これは X の埋め込みに対し、一意的に定まる。） T を G_X の全域木とし、 T に属さない G_X の辺 $e_1^*, e_2^*, \dots, e_m^*$ に対応する2次元多様体的セルが e_1, e_2, \dots, e_m であるとする。また、 $m_i \subset e_i$ を e_i^* のメリディアンとし、 X の分岐を l_1, l_2, \dots, l_n としておく。

各 M_i は、(CW多様体的複体の定義により) 向き付け可能曲面であるから、各 $H_1(M_i - f_i^{-1}(G_X \cap X))$ において、 $[\partial M_i] + [f_i^{-1}(m_i)] = 0$ が成り立ち、 $H_1(S^3 - G_X; \mathbb{Z})$ において、 $(f_i)_*([\partial M_i] + [f_i^{-1}(m_i)]) = 0$ となる。従って、 $i = 1, 2, \dots, m$ に対し、

$$\sum_{j=1}^n ad_{e_i}(l_j)[l_j] + [m_i] = 0$$

を得る。これを行列で表すと、

$$A_T \begin{bmatrix} l_1 \\ \vdots \\ l_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} m_1 \\ \vdots \\ m_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

となり, $[m_1], [m_2], \dots, [m_m]$ が $H_1(S^3 - G_X; \mathbb{Z})$ の基底であることから, ある (n, m) 行列 B が存在して,

$$A_T B \begin{bmatrix} m_1 \\ \vdots \\ m_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} m_1 \\ \vdots \\ m_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

と表せる. 従って, $A_T B = -E$ であり, 補題から, $m \leq n$ かつ, A_T の全ての m 次小行列式の最大公約数の絶対値が1である. また, 抽象的対対グラフに対し, その全域木によらず代数的行列の型は同じであるから, (1), (2) のどちらも満たさないような X の抽象的対対グラフが存在することがわかった. 対偶をとることにより, 定理3.4. が示される. □

4. 臨界的な正則2次元CW多様体的複体

正則な2次元CW多様体的複体 X が, S^3 に関して**臨界的**であるとは, 任意の $x \in X$ に対し, X の部分空間 $X - x$ が S^3 に埋め込み可能であるときをいう.

定理3.4を用いることで, 多くの正則な2次元CW多様体的複体が S^3 に埋め込み不可能であることがわかるが, このセクションでは, 特に, 臨界的な2次元CW多様体的複体の無限系列の例を紹介する.

定理4.1. 1つの2次元多様体セル e_1 と1つの分岐 l_1 のみから成る2次元正則CW多様体的複体 X_1 (下図参照) が埋め込み不可能である為の必要十分条件は, $|ad_{e_1}(l_1)| \geq 2$ である. また, X_1 が埋め込み不可能のとき, これは臨界的である.

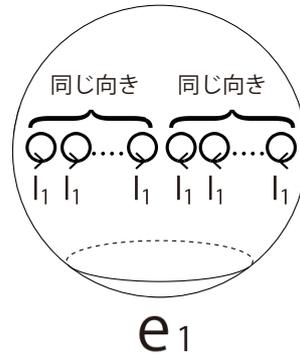


図3: セル数と分岐数がともに1である正則な臨界的2次元CW多様体的複体 X_1 .

証明. X_1 の抽象的対対グラフは, ループ (1本の辺と1つの頂点から成るブーケ) となり, $\det(A_T) = \det(ad_{e_1}(l_1)) = ad_{e_1}(l_1)$ となるから, $|ad_{e_1}(l_1)| \geq 2$ のとき X_1 は埋め込み不可能である. 逆に, $|ad_{e_1}(l_1)| < 2$ のとき, 実際に埋め込みを構成することによって埋め込み可能であることがわかる. □

定理4.2. $n \geq 3$ のとき, 図4で表される2次元正則多様体的複体 X_2 は, 臨界的である. ただし, X_2 は, n 枚のセル e_1, e_2, \dots, e_n から成る, 分岐数 n の正則多様体的複体を表している. 各 e_i は n 穴あき球面 (S^2 から開円板を n 個とり除いたもの) であり, e_i には, l_i を除く全ての分岐が含まれる. また, 境界は全て同調するように向きがついている.

証明. 組み合わせ論的な議論により, X_2 の任意の抽象的対対グラフ G_{X_2} は, n 本の辺と1個の頂点からなるブーケしかないことがわかる. このとき, G_{X_2} の全域木 T は1点の

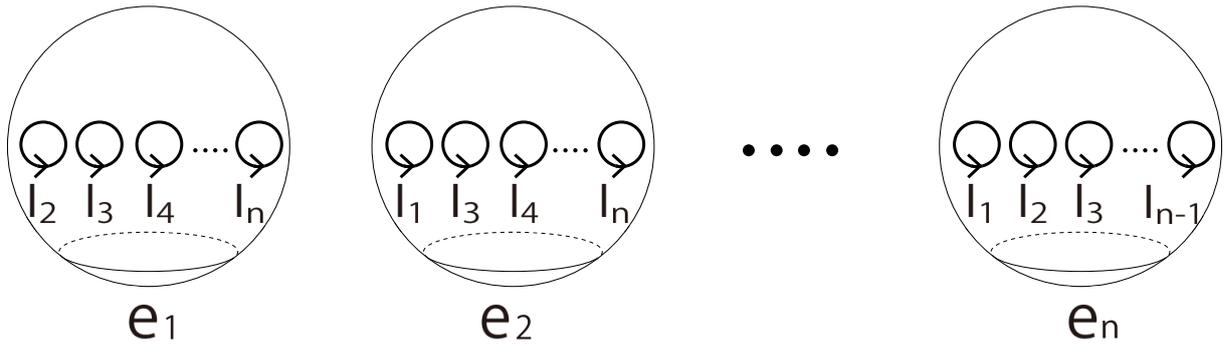


図 4: n 個のセルと n 個の分岐からなる, 正則な臨界的 2 次元 CW 多様体的複体 X_2 .

みからなるグラフであり, (n, n) 型代数的次数行列 A_T は,

$$A_T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

である. $\det(A_T) = (-1)^{n+1}(n-1)$ より, $|\det(A_T)| = n-1 \geq 2$. よって X_2 は S^3 に埋め込み不可能である. \square

定理 4.3. $n \geq 2, k_i \geq 1, k_1 k_2 k_3 \cdots k_n \geq 3$ とするとき, 以下 (図 5) で表される, 正則な 2 次元多様体的複体 X_3 は臨界的である.

ただし, X_3 は, n 枚のセル e_1, e_2, \dots, e_n から成る, 分岐数 n の正則多様体的複体を表している. 各 e_i は $(k_i + 1)$ 穴あき球面であり, e_i には, 分岐 l_i が k_i 本と, 分岐 l_{i+1} が 1 本の二種類が含まれる. また, e_i において, l_i に対応する境界は全て同調するように向きがついている.

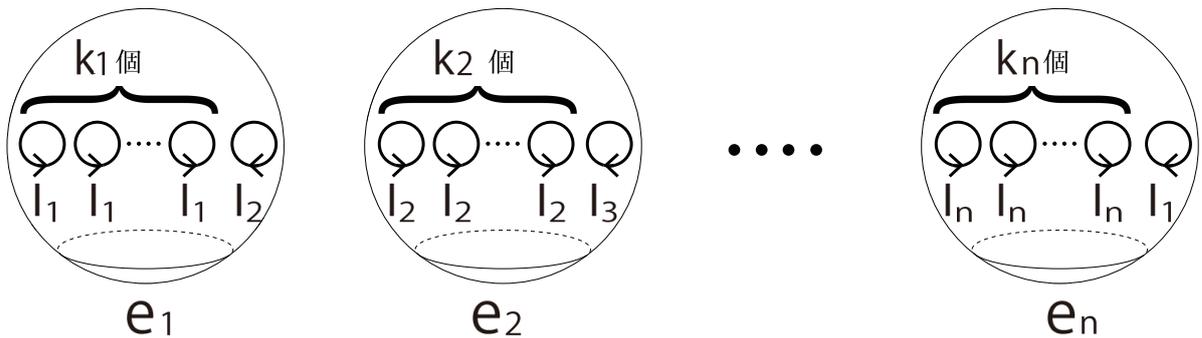


図 5: n 個のセルと n 個の分岐からなる, 正則な臨界的 2 次元 CW 多様体的複体 X_3 .

証明. 組み合わせ論的な議論により, X_3 の任意の抽象的双対グラフ G_{X_3} は, n 本の辺と 1 個の頂点からなるブーケしかないことがわかる. このとき, G_{X_3} の全域木 T は 1 点の

みからなるグラフであり, (n, n) 型代数的次数行列 A_T は,

$$A_T = \begin{pmatrix} k_1 & -1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & k_2 & -1 & 0 & \cdots & \vdots \\ \vdots & 0 & k_3 & -1 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & k_{n-1} & -1 \\ -1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & k_n \end{pmatrix}$$

であり, $\det(A_T) = k_1 k_2 k_3 \cdots k_n - 1 \geq 2$. よって X_3 は S^3 に埋め込み不可能である. \square

• 以下, X_1, X_2, X_3 の臨界性について, 大まかに述べる.

X_1 の臨界性. まず, X_1 から 1 点を除いたものを考える. 以下の図の様に, 向きが異なる分岐を交互に貼り付けていき, 向きが同じ分岐が残ったら, 円を描くように貼り付けていく.

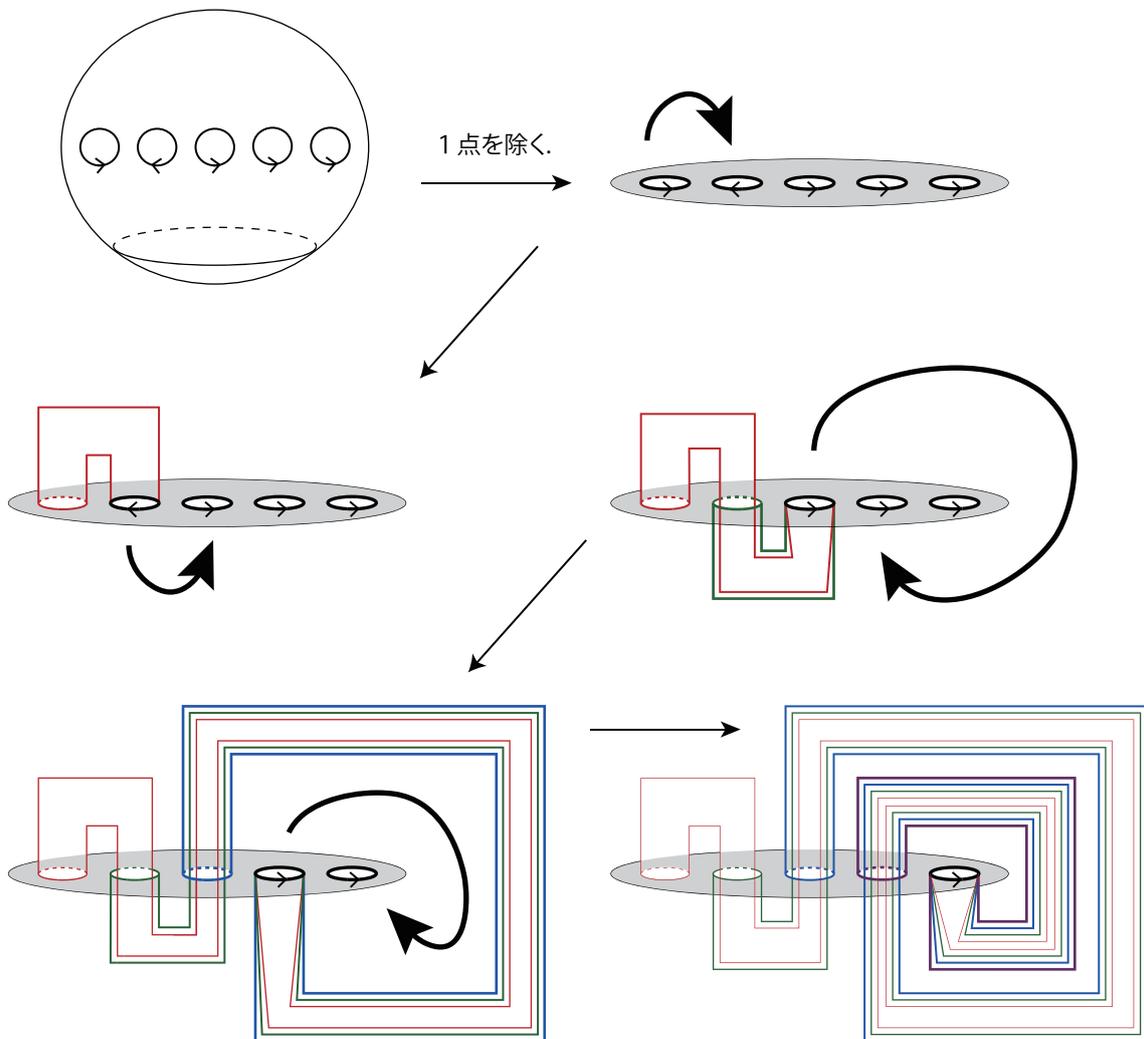
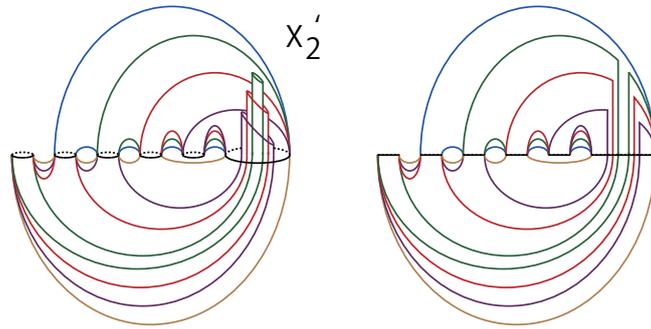


図 6: $X_1 - x$ の構成手順の例.

X_2 の臨界性. 多様体的セル e_1 から, e_{n-1} によって得られる 2次元正則多様体的複体 X'_2 の埋め込みの例は以下のようなになる. 図は, $n = 6$ の場合である.



横から見た図

図 7: $n = 6$ の場合の X'_2 の埋め込み例.

これに, 残った e_n から 1 点を除いたものを, X'_2 に貼り付けることで X_2 から 1 点を除いた位相空間を構成できる. (各 e_i は対称的なので, e_n から 1 点を取り除いたものを考えても差し支えない.)

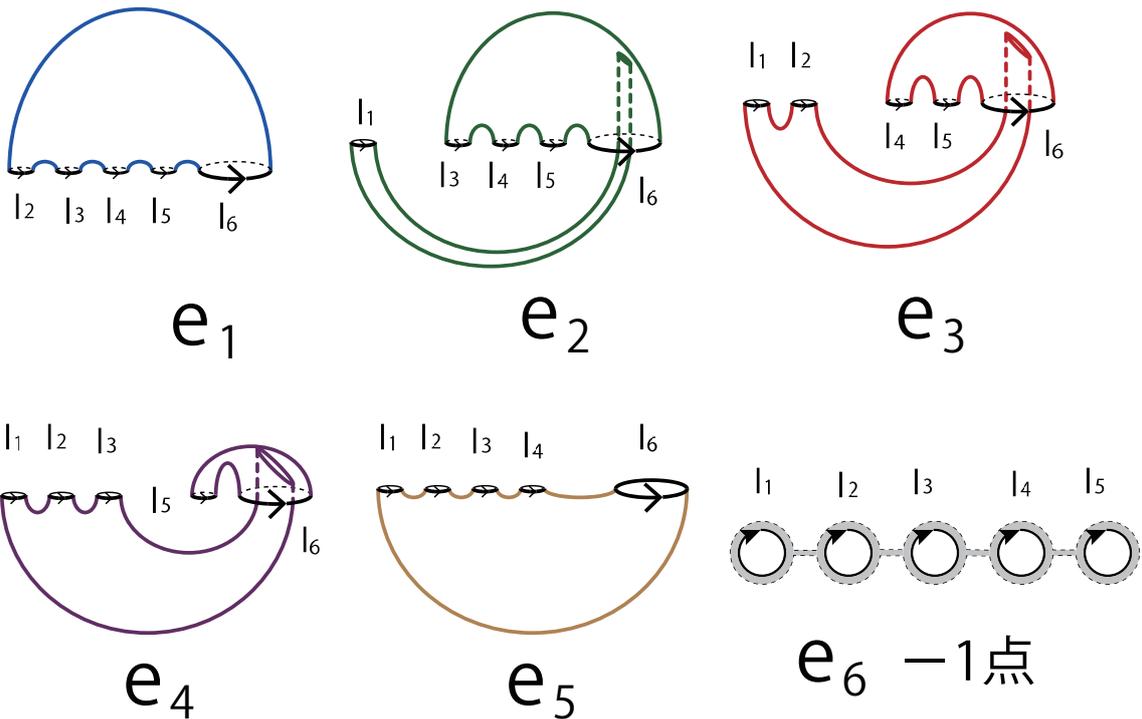


図 8: $n = 6$ の場合の, X_2 の多様体的セル e_1, \dots, e_5 と, e_6 から 1 点を除いたもの.

X_3 の臨界性. 各 i に対して, 例として $k_i = 2$ となる場合について述べる. e_1 から e_{n-1} によって得られる 2次元正則 CW 多様体的複体 X'_3 の S^3 への埋め込みの例は以下のようになる. 図は, $n = 4$ の場合である.

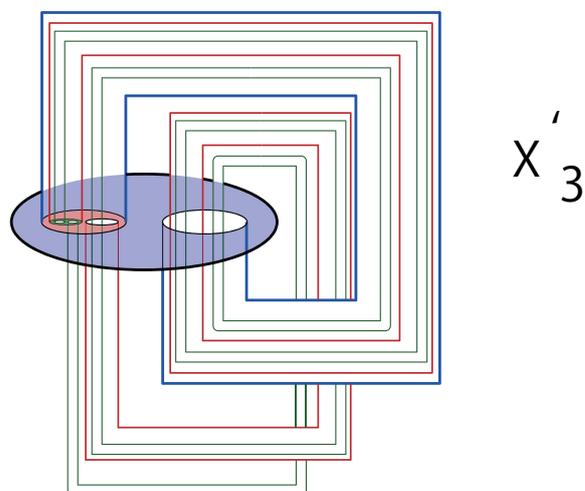


図 9: 各 k_i が 2 で, $n = 4$ の場合の X'_3 の S^3 への埋め込み例.

次に, 残った e_n から 1 点を除いたものを考え, それを X'_3 に貼り付ける事で X_3 から 1 点を除いた位相空間の S^3 への埋め込みを得る. (各 e_i は対称的なので, e_n から 1 点を取り除いたものを考えても差し支えない.)

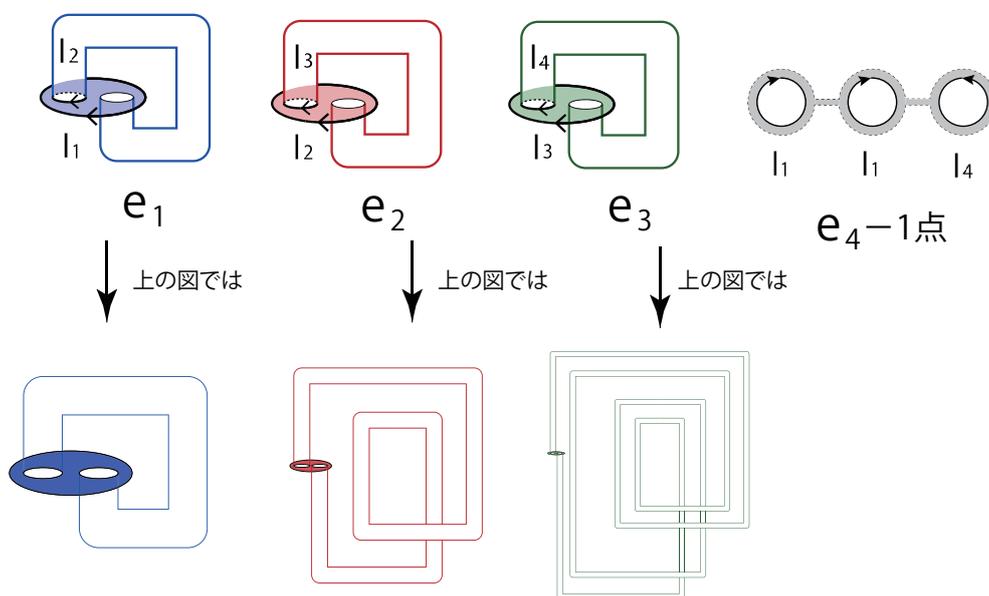


図 10: $k_i = 2$, $n = 4$ の場合の, 多様体的セル e_1, e_2, e_3 と, e_4 から 1 点を除いたもの.

参考文献

- [1] R. E. van Kampen., *Komplexe in euklidischen Raumen.*, Abh. Math. Sem. Hamburg, 9:72—78, 1932. Berichtigung dazu, ibid. (1932) 152—153.