

# 非有向閉曲面の $\mathbb{Z}_2$ 係数 1 次ホモロジー上の mod 2 交叉形式を保つ自己同型群の有限 表示

大森 源城 (東京工業大学大学院理工学研究科)  
小林 竜馬 (東京理科大学大学院理工学研究科)

## 1 導入

$N_g$  を種数  $g$  の連結な向き付け不可能閉曲面, すなわち射影平面  $g$  個の連結和,  $\cdot : H_1(N_g; \mathbb{Z}_2) \times H_1(N_g; \mathbb{Z}_2) \rightarrow \mathbb{Z}_2$  を  $N_g$  の  $\mathbb{Z}_2 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  係数 1 次ホモロジー群  $H_1(N_g; \mathbb{Z}_2)$  上の交叉形式とする.  $N_g$  のモデルとして  $g$  個の境界成分を持つ球面の各境界成分にメビウスの帯を貼り合せたものを考えることにし, メビウスの帯を貼り合せた印として円 (球面の境界) の中に  $\times$  を描くことにする (図 1, 3 を参照). この  $N_g$  の表記は,  $g$  個の境界成分を持つ球面の各境界成分の対蹠点を同一視したものと同一であることに注意する. このとき,  $\text{Aut}(H_1(N_g; \mathbb{Z}_2), \cdot)$  を, 交叉形式  $\cdot$  を保つ  $H_1(N_g; \mathbb{Z}_2)$  上の自己同型写像全体からなる  $\text{Aut} H_1(N_g; \mathbb{Z}_2)$  の部分群とする. 図 1 のような  $H_1(N_g; \mathbb{Z}_2)$  の基底  $\{x_1, x_2, \dots, x_g\}$  を取ることにより  $\text{Aut}(H_1(N_g; \mathbb{Z}_2), \cdot)$  は  $\mathbb{Z}_2^g$  上の直行変換からなる群  $O(g, \mathbb{Z}_2) = \{A \in GL(g, \mathbb{Z}_2) \mid {}^tAA = E\}$  と同型である為,  $\text{Aut}(H_1(N_g; \mathbb{Z}_2), \cdot)$  は有限群である. 特に,  $\text{Aut}(H_1(N_g; \mathbb{Z}_2), \cdot)$  は有限表示可能である. 更に, Korkmaz [1] と Szepietowski [7] により, 次の同型対応が知られている.

$$\text{Aut}(H_1(N_g; \mathbb{Z}_2), \cdot) \cong \begin{cases} \text{Sp}(2h, \mathbb{Z}_2) & \text{if } g = 2h + 1, \\ \text{Sp}(2h, \mathbb{Z}_2) \times \mathbb{Z}_2^{2h+1} & \text{if } g = 2h + 2. \end{cases}$$

本稿では  $\text{Aut}(H_1(N_g; \mathbb{Z}_2), \cdot)$  の明確な有限表示について述べ, その応用として  $\text{Aut}(H_1(N_g; \mathbb{Z}_2), \cdot)$  の 1, 2 次ホモロジー群の計算についても述べる.

## 2 $\text{Aut}(H_1(N_g; \mathbb{Z}_2), \cdot)$ の生成系

$N_g$  上の双側な単純閉曲線  $\gamma$  に対し,  $\gamma$  に沿った Dehn twist とは, 次のような操作で得られる  $N_g$  上の自己微分同相写像のことである. まず,  $\gamma$  の  $N_g$  内での管状近傍  $N$  を取る ( $N$  はアニュラスと微分同相となる). このとき,  $N$

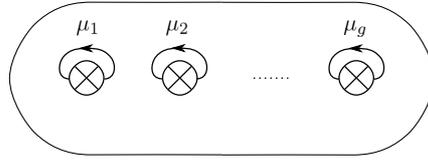


図 1: ホモロジー類  $x_1, x_2, \dots, x_g$  を代表する  $N_g$  上の単純閉曲線  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_g$  .

を  $\gamma$  で切って 360 度 (アニュラスに適当な向きを入れ) 右回転させ再度貼り直すことによって構成される  $N$  上の写像  $\tau_\gamma$  を考える (図 2 参照) .  $\gamma$  に沿った  $N_g$  上の Dehn twist  $t_\gamma$  とは, この  $\tau_\gamma$  を恒等写像で  $N_g$  上に拡張して得られる  $N_g$  上の自己微分同相写像のことである . 曲面が向き付け可能な場合と異なり,  $N_g$  上の Dehn twist を考える場合は, Dehn twist を定義する各曲線ごとに捻る方向を指定する必要があることに注意する .

図 3 のような  $N_g$  上の単純閉曲線  $\alpha_1, \dots, \alpha_{g-1}, \beta$  に対し, それらに沿った Dehn twist をそれぞれ  $t_{\alpha_1}, \dots, t_{\alpha_{g-1}}, t_\beta$  とする . それぞれの曲線の横の矢印で Dehn twist の正の向きを定義する .  $N_g$  上の自己微分同相写像  $f : N_g \rightarrow N_g$  に対し  $f$  の  $H_1(N_g; \mathbb{Z}_2)$  への作用を  $f_*$  とし,  $a_i := (t_{\alpha_i})_*$  ( $i = 1, \dots, g-1$ ),  $b = (t_\beta)_*$  とおく . このとき,  $a_i$  ( $i = 1, \dots, g-1$ ),  $b$  は 1 章で与えられた  $H_1(N_g; \mathbb{Z}_2)$  の基底  $\{x_1, x_2, \dots, x_g\}$  に対し, 以下のように作用することが分かる .

$$a_i : \begin{cases} x_i & \mapsto x_{i+1}, \\ x_{i+1} & \mapsto x_i, \\ x_k & \mapsto x_k \quad (k \neq i, i+1), \end{cases} \quad b : \begin{cases} x_1 & \mapsto x_2 + x_3 + x_4, \\ x_2 & \mapsto x_1 + x_3 + x_4, \\ x_3 & \mapsto x_1 + x_2 + x_4, \\ x_4 & \mapsto x_1 + x_2 + x_3, \\ x_k & \mapsto x_k \quad (k \neq 1, 2, 3, 4). \end{cases}$$

Mccarthy-Pinkall [2] は,  $\text{Aut}(H_1(N_g; \mathbb{Z}_2), \cdot)$  が  $a_1, \dots, a_{g-1}, b$  よって生成されることを示している .

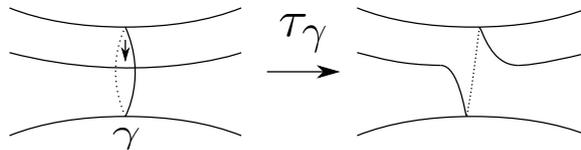


図 2: アニュラス上の写像  $\tau_\gamma$  .

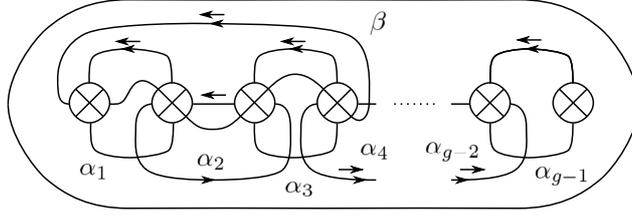


図 3:  $N_g$  上の単純閉曲線  $\alpha_1, \dots, \alpha_{g-1}, \beta$ .

### 3 主結果

定理 3.1.  $\text{Aut}(H_1(N_g; \mathbb{Z}_2), \cdot)$  は  $g = 1$  のとき自明な群となり, また  $g = 2, 3$  のとき生成系を  $a_1, \dots, a_{g-1}$ ,  $g \geq 4$  のとき生成系を  $a_1, \dots, a_{g-1}, b$  とし, 以下のような関係式からなる群表示を持つ:

1.  $a_i^2 = b^2 = 1$  ( $i = 1, \dots, g-1$ ),
2.  $(a_i a_j)^2 = 1$  ( $|i-j| > 1, g \geq 4$ ),
3.  $(a_i a_{i+1})^3 = 1$  ( $i = 1, \dots, g-2, g \geq 3$ ),
4.  $(a_i b)^2 = 1$  ( $i \neq 4, g \geq 4$ ),
5.  $(a_4 b)^3 = 1$  ( $g \geq 5$ ),
6.  $(a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 b)^{12} = (a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 b)^9$  ( $g \geq 7$ ),
7.  $[a_{g-5}, b_{\frac{g-2}{2}}] = 1$  ( $g \geq 8$  even),

ただし,  $b_0 = a_1$ ,  $b_1 = b$ ,  $b_2 = (a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 b)^5$ ,

$b_{i+1} = (b_{i-1} a_{2i} a_{2i+1} a_{2i+2} a_{2i+3} b_i)^5 (b_{i-1} a_{2i} a_{2i+1} a_{2i+2} a_{2i+3})^{-6}$  ( $2 \leq i \leq \frac{g-4}{2}$ ),  
 $[X, Y] = XYX^{-1}Y^{-1}$  とする.

定理 3.2.  $g \geq 9$  もしくは  $g = 7$  のとき,  $H_2(\text{Aut}(H_1(N_g; \mathbb{Z}_2), \cdot); \mathbb{Z}) = 0$  となる.

注意 3.3. 定理 3.1 は  $g = 1, 2$  の場合は明らかであり,  $g = 3, 4$  の場合にはしては Szepietowski [6] によって与えられている. また, 定理 3.2 の  $g$  が奇数の場合は Stein [4] により示されていることに注意する.

注意 3.4. 定理 3.1 の表示を用いて計算することにより,  $g \geq 1$  に対し  $\text{Aut}(H_1(N_g; \mathbb{Z}_2), \cdot)$  の 1 次ホモロジー群は以下ようになる.

$$H_1(\text{Aut}(H_1(N_g; \mathbb{Z}_2), \cdot); \mathbb{Z}) = \begin{cases} 0 & (g = 1, g \geq 7), \\ \langle [a_1] \rangle \cong \mathbb{Z}_2 & (g = 2, 3, 5, 6), \\ \langle [a_1], [b] \rangle \cong \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 & (g = 4). \end{cases}$$

この結果は  $g \geq 7$  のとき Korkmaz [1] により示されている.

## 4 定理 3.1 の証明の概略

$\mathcal{M}(N_g)$  を  $N_g$  の写像類群, すなわち  $N_g$  上の微分同相写像のアイソトピー類からなる群とする. Stukow [5] によって  $g \geq 4$  のときに  $\mathcal{M}(N_g)$  の表示は与えられている.  $\mathcal{M}(N_g)$  の  $H_1(N_g; \mathbb{Z}_2)$  への作用は交叉形式を保つので, 自然な準同型写像  $\rho_2 : \mathcal{M}(N_g) \rightarrow \text{Aut}(H_1(N_g; \mathbb{Z}_2), \cdot)$  がある. この準同型写像  $\rho_2$  の核を  $\Gamma_2(N_g)$  とおき,  $N_g$  のレベル 2 写像類群と呼ぶ. Szepietowski [6] は,  $\Gamma_2(N_g)$  の  $\mathcal{M}(N_g)$  の中での正規生成系を与えている. 更に, McCarthy と Pinkall [2] は準同型写像  $\rho_2$  が全射であることを示しているので  $\text{Aut}(H_1(N_g; \mathbb{Z}_2), \cdot)$  は商群  $\mathcal{M}(N_g)/\Gamma_2(N_g)$  と同型である. 従って, Stukow [5] の  $\mathcal{M}(N_g)$  の表示に, Szepietowski [6] の  $\Gamma_2(N_g)$  の  $\mathcal{M}(N_g)$  の中での正規生成系を関係子として加えた表示を計算すればよい.

## 5 定理 3.2 の証明の概略

同一視  $\text{Aut}(H_1(N_g; \mathbb{Z}_2), \cdot) \cong O(g, \mathbb{Z}_2)$  のもと, 次のような準同型写像を考える.

$$\iota_g : \begin{array}{c} \text{Aut}(H_1(N_{g-1}; \mathbb{Z}_2), \cdot) \\ \Downarrow \\ A \end{array} \hookrightarrow \begin{array}{c} \text{Aut}(H_1(N_g; \mathbb{Z}_2), \cdot) \\ \Downarrow \\ \left( \begin{array}{c|c} A & \begin{array}{c} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{array} \\ \hline 0 & \dots & 0 & 1 \end{array} \right). \end{array}$$

更に,  $\iota_g$  によって誘導される 2 次ホモロジー群の間の準同型写像

$$(\iota_g)_* : H_2(\text{Aut}(H_1(N_{g-1}; \mathbb{Z}_2), \cdot); \mathbb{Z}) \rightarrow H_2(\text{Aut}(H_1(N_g; \mathbb{Z}_2), \cdot); \mathbb{Z})$$

を考える. 注意 3.3 より  $g$  が奇数のとき  $H_2(\text{Aut}(H_1(N_g; \mathbb{Z}_2), \cdot); \mathbb{Z}) = 0$  なので, 定理 3.2 を示すためには  $g \geq 10$  のときに  $(\iota_g)_*$  が全射であることを示せばよい. 具体的には,  $g \geq 9$  のときに  $H_2(\text{Aut}(H_1(N_g; \mathbb{Z}_2), \cdot); \mathbb{Z})$  の生成系を具体的に構成し, その生成系の形が曲面の種数に依らずに同じになることを利用して  $(\iota_g)_*$  が全射であることを示す. その  $H_2(\text{Aut}(H_1(N_g; \mathbb{Z}_2), \cdot); \mathbb{Z})$  の生成系の構成は, 定理 3.1 の表示に Tietze 変換を施してできた  $\text{Aut}(H_1(N_g; \mathbb{Z}_2), \cdot)$  の表示に, Pitsch [3] の議論を適用して行う.

## 謝辞

講演の機会を与えてくださった世話人の東京女子大学の大山淑之先生と新國亮先生に感謝申し上げます. また, 講演後にコメントをくださった方々にも感謝いたします.

## 参考文献

- [1] M. Korkmaz, *First homology group of mapping class group of nonorientable surfaces*, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. **123** (1998), 487-499.
- [2] J. D. McCarthy and U. Pinkall. *Representing homology automorphisms of nonorientable surfaces*, Max Planck Inst. Preprint MPI/SFB 85-11, revised version written on 26 Feb 2004, available from <http://www.math.msu.edu/~mccarthy/publications/selected.papers.html>.
- [3] W. Pitsch, *Un calcul élémentaire de  $H_2(\mathcal{M}_{g,1}, \mathbb{Z})$  pour  $g \geq 4$* , C. R. Acad. Sci. Paris, t. **329**, Série I (1999), 667–670.
- [4] M. R. Stein, *Surjective stability in dimension 0 for  $K_2$  and related functors*, Trans. Amer. Math. Soc. **178** (1973), 165-191.
- [5] M. Stukow. *A finite presentation for the mapping class group of a nonorientable surface with Dehn twists and one crosscap slide as generators*, J. Pure Appl. Algebra **218** (2014), no. 12, 2226–2239.
- [6] B. Szepietowski. *Crosscap slides and the level 2 mapping class group of a nonorientable surface*, Geom. Dedicata **160** (2012), 169-183.
- [7] B. Szepietowski, *Low dimensional linear representations of the mapping class group of a nonorientable surface*, arXiv:1303.1917 [math.GT], 2013.