

An extension of the LMO functor

野崎 雄太 (東大数理)*

概 要

Cheptea-葉廣-Massuyeau [4] により, LMO 不変量の拡張として LMO 関手が導入された. LMO 関手は曲面の間のある種のコボルディズムに対して Jacobi 図の形式的級数を返す. ここで曲面は高々 1 個の境界成分を持つものに限られていたが, それを任意個数の境界成分を持つ場合に拡張した.

1. 背景と主結果

以下, 多様体は全て連結で向き付けられているとする. Le-村上-大槻 [7] は閉 3 次元多様体の位相不変量として LMO 不変量を定義した. 一方 LMO 関手は図 1 のような上面 $(\Sigma_{2,1})$ から下面 $(\Sigma_{2,1})$ へのコボルディズムに対する不変量であり, 次の意味で LMO 不変量の拡張である: 円板間のコボルディズムに対して LMO 関手を適用すると LMO 不変量が得られる.

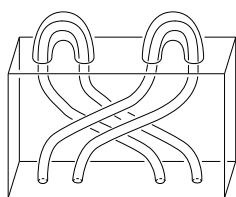


図 1: [4] で扱われている cobordism

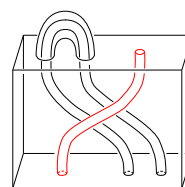


図 2: 新たに導入した cobordism

主結果は, $\Sigma_{g,b+1}$ ($b \geq 1$) の場合 (例えば図 2) への拡張であって, LMO 関手の重要な性質 [4, Lemma 4.12, Theorem 4.13, 7.11] を保つものを構成したことである.

定理 1.1 $\tilde{Z}: \mathcal{LCob}_q \rightarrow {}^{ts}\mathcal{A}$ はモノイダル圏の間のテンソル積を保つ関手であり, 以下を満たす.

- $\tilde{Z}(M, \sigma, m)$ は自身の s -reduction と Y -reduction の非交和であり, 前者は $\exp_{\square}(\text{Lk}(M)/2)$ に等しい. ($\text{Lk}(M)$ は [4, Definition 2.11, 2.14] で定義されたある絡み目行列だが, 本研究において半整数の絡み数を新たに導入することで拡張されている.)
- $\tilde{Z}$ は 3 次元多様体の $\mathbb{Q}$ 値有限型不変量に対して普遍的である.

尚, 講演で述べた Milnor 不変量との関係は 3 節で扱う.

2010 Mathematics Subject Classification: 57M27, 57M25

キーワード: LMO functor, cobordisms, Jacobi diagrams, Milnor invariants, string links

* 〒153-8914 東京都目黒区駒場 3-8-1 東京大学 大学院数理科学研究科

e-mail: nozaki@ms.u-tokyo.ac.jp

2. 定義と計算例

定理 1.1 に書いた圏 $\mathcal{LCob}_q$ と ${}^{ts}\mathcal{A}$ および関手 $\tilde{Z}$ の構成を述べる.

定義 2.1 ($\mathcal{LCob}$) 対象は文字 $\bullet$ と $\circ$ で生成される自由モノイド $\text{Mon}(\bullet, \circ)$ の元. w から v への射は F_w から F_v への Lagrangian コボルディズム (M, σ, m) (M はコンパクト 3 次元多様体, $\sigma \in \mathfrak{S}_{|w^\circ|}$, $m: R_{v,\sigma}^w \rightarrow \partial M$ は同相写像, $F_w, R_{v,\sigma}^w$ は図 3, 4 参照. ただし $\sigma = \tau$ かつ同相写像 $f: M \rightarrow N$ で $f|_{\partial M} \circ m = n$ を満たすものが存在するとき (M, σ, m) と (N, τ, n) を同一視する. またホモロジー的に良い条件を満たすものを Lagrangian と呼ぶ.) . $(M, \sigma, m) \circ (N, \tau, n)$ は 2 つを縦に積んだもの $(M \cup_{m_+ \circ n_-^{-1}} N, \sigma \circ \tau, m_- \cup n_+)$. Id_w は $F_w \times [-1, 1]$ に自然にパラメータを入れたもの. $(M, \sigma, m) \otimes (N, \tau, n)$ は 2 つを横につなげたものとする.

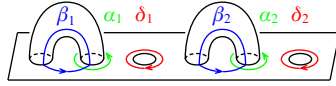


図 3: コンパクト曲面 $F_{\bullet\circ\bullet\circ}$

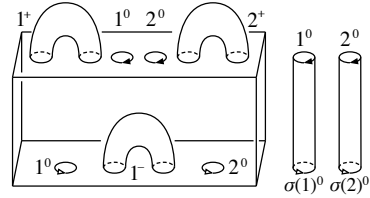


図 4: 閉曲面 $R_{\bullet\circ\bullet\circ,\sigma}^{\bullet\circ\bullet\circ}$

不変量を構成するに当たり, コボルディズムを bottom-top タングルで表しておく (図 5). さらに端点を持つタングルの Kontsevich 不変量を使うため,

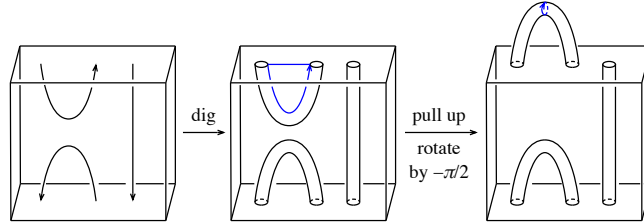


図 5: bottom-top タングル $(B, \gamma) \xleftrightarrow{1:1} \text{コボルディズム } (M, \sigma, m)$

$\text{Mon}(\bullet, \circ)$ を自由マグマ (非結合的語の集合) に置き換えた圏 $\mathcal{LCob}_q$ を用意する. そして bottom-top q タングル (B, γ) の Kontsevich-LMO 不変量を

$$Z^{\text{K-LMO}}(B, \gamma) := U_+^{-\sigma_+(L)} \sqcup U_-^{-\sigma_-(L)} \sqcup \int_{\pi_0 L} \chi_{\pi_0 L}^{-1} Z^K(\gamma \cup L^\nu) \in \mathcal{A}(\gamma, \emptyset)$$

で定める. ここに L は $[-1, 1]^3$ 内の枠付き絡み目で $[-1, 1]_L^3 \cong B$ なるもの, $\sigma_\pm(L)$ は L の絡み目行列の正・負の固有値の個数, $\int_{\pi_0 L}$ は $\pi_0 L$ に沿った形式的 Gauss 積分, $\nu := Z^K(\bigcirc_0)$ (0 枠自明結び目の Kontsevich 不変量), $U_\pm := \int \chi^{-1}(Z^K(\bigcirc_{\pm 1}) \sharp \nu) \in \mathcal{A}(\emptyset, \emptyset)$ である.

また有限個の円周と線分の非交和 X と有限集合 C に対し, (X, C) 上の Jacobi 図 (1, 3 価グラフであって, 各 1 価頂点 (外部頂点) は X 上にある

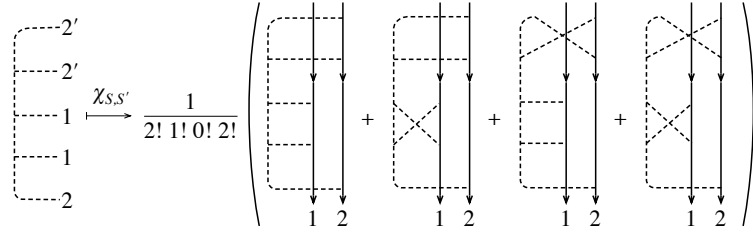


図 6: $\chi_{S,S'}$ の例 ($X = \downarrow$, $S = \{1, 2\}$, $S' = \{1', 2'\}$)

か C の元で色付けられ、各 3 価頂点（内部頂点）には巡回順序が入っているもの）たちの張る $\mathbb{Q}$ ベクトル空間を $\mathcal{A}S$, $\mathcal{I}HX$, $\mathcal{S}TU$ 関係式で割った空間を $\mathcal{A}(X, C)$ と書く．外部頂点の個数と内部頂点の個数 (i-deg) の平均を次数として、 $\mathcal{A}(X, C)$ は次数付きベクトル空間になるから、その完備化を取り、再び $\mathcal{A}(X, C)$ と書く．例えば $\mathcal{A}(\gamma, \emptyset)$ の元は、全ての外部頂点が γ 上にあるような Jacobi 図の形式的級数である．

定義 2.2 (${}^{ts}\mathcal{A}$) 対象は $\mathbb{Z}_{\geq 0}^2$ の元． (g, b) から (f, b) への射は Jacobi 図の空間 $\mathcal{A}(\emptyset, [g]^+ \cup [f]^- \cup [b]^0)$ ($[n]^* := \{1^*, \dots, n^*\}$) の元であって top-substantial な（すなわち両端が $[g]^+$ -colored な strut を含まない）もの．合成は

$$x \circ y := \chi_{[b]^0}^{-1} \chi_{[b]^0, [b]^{0'}} \left\langle (x/i^+ \mapsto i^*), (y/i^- \mapsto i^*, i^0 \mapsto i^{0'}) \right\rangle_{[g]^*}.$$

ここに $\langle -, - \rangle_{[g]^*}$ は i^* -colored 頂点同士 ($i = 1, \dots, g$) をつないで足し上げる記号、 $\chi_{[b]^0}$ は Poincaré-Birkhoff-Witt 同型のよく知られた類似、 $\chi_{[b]^0, [b]^{0'}}$ は新たに導入したその亜種（図 6）． $\text{Id}_{(g,b)}$ は strut の級数 $\exp_{\sqcup} \left(\sum_{i=1}^g \begin{array}{c} i^+ \\ \vdots \\ i^- \end{array} \right)$ ． $x \otimes y$ は非交和 $x \sqcup y$ とする．

定義 2.3 ($\tilde{Z}$) Lagrangian q コボルディズム $(M, \sigma, m) \in \mathcal{L}Cob_q(w, v)$ に対し、

$$\tilde{Z}(M, \sigma, m) := \chi_{\pi_0(\gamma)}^{-1} Z^{\text{K-LMO}}(B, \gamma) \circ {}^{ts}\mathcal{A} \mathsf{T}_g \in {}^{ts}\mathcal{A}((|w^\bullet|, b), (|v^\bullet|, b))$$

と定める ($b := |v^0| = |w^0|$)．ここに T_g は [4] で定義された $\mathcal{A}(\emptyset, [g]^+ \cup [g]^-)$ の元である．

例 2.4 冒頭の 2 つのコボルディズムにおける値は次の通りである：

$$\begin{aligned} \log_{\sqcup} \tilde{Z}(\text{図 1}) &= \begin{array}{c} 1^+ \\ \vdots \\ 2^- \end{array} + \begin{array}{c} 2^+ \\ \vdots \\ 1^- \end{array} - \frac{1}{2} \begin{array}{c} 1^+ \\ \vdots \\ 2^- \end{array} \begin{array}{c} 2^+ \\ \vdots \\ 1^- \end{array} + (\text{i-deg} > 2) \in {}^{ts}\mathcal{A}((2, 0), (2, 0)), \\ \log_{\sqcup} \tilde{Z}(\text{図 2}) &= \begin{array}{c} 1^+ \\ \vdots \\ 1^- \end{array} + \frac{1}{2} \begin{array}{c} 1^+ \\ \vdots \\ 1^- \end{array} \begin{array}{c} 1^0 \\ \vdots \\ 1^0 \end{array} + \frac{1}{8} \begin{array}{c} 1^+ \\ \vdots \\ 1^- \end{array} \begin{array}{c} 1^0 \\ \vdots \\ 1^0 \end{array} + (\text{i-deg} > 2) \in {}^{ts}\mathcal{A}((1, 1), (1, 1)). \end{aligned}$$

3. Milnor 不変量との関係

ℓ 成分ストリング絡み目とは、点 $p_1, \dots, p_\ell$ 付き円板の間のコボルディズム B と枠付き紐 $\sigma = \bigsqcup_{i=1}^\ell [-1, 1]_i$ の組 (B, σ) のことである。ただし $[-1, 1]_i$ は $p_i \times 1$ から $p_i \times (-1)$ へ向き付けられている。例えば図 7 右は 3 成分ストリング絡み目（射影図と見て blackboard framing を適用）であり、左の bottom-top タングルから Milnor-Johnson 対応 ([4, §8.5] の拡張) $\text{MJ}_{\bullet\circ}$ で得られる。

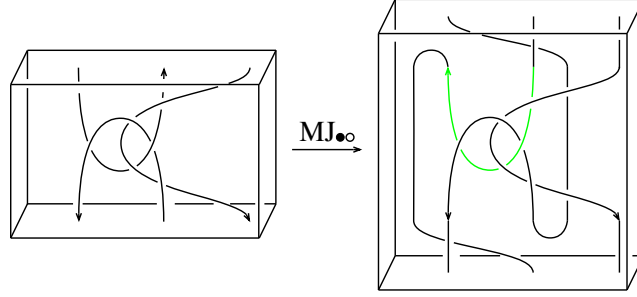


図 7: bottom-top タングルとそれに対応するストリング絡み目

さて (B, σ) から、3 次元多様体 $S := \overline{B \setminus N(\sigma)}$ と同相写像

$$s: \partial(D_\ell \times [-1, 1]) \rightarrow \partial S \quad (D_\ell := \text{rectangle with } \ell \text{ circles } x_1, \dots, x_\ell \text{ and a point } * \text{ at the bottom right corner})$$

が得られる。ここでストリング絡み目を

$$\mathcal{S}_\ell^{\text{fr}} := \{ \ell \text{ 成分のストリング絡み目 } (B, \sigma) \mid H_*(B) = H_*([-1, 1]^3) \}$$

に制限すると、第 n Artin 表現と呼ばれるモノイド準同型

$$A_n: \mathcal{S}_\ell^{\text{fr}} \rightarrow \text{Aut}(\varpi / \varpi_{n+1}), \quad (B, \sigma) \mapsto s_{-,*}^{-1} \circ s_{+,*}$$

が定義できる ($n \geq 1$)。ここに ϖ は基本群 $\pi_1(D_\ell, *)$ (階数 ℓ の自由群), ϖ_n はその降中心列 $\varpi_1 := \varpi$, $\varpi_n := [\varpi_{n-1}, \varpi]$ である。これを用いて $\mathcal{S}_\ell^{\text{fr}}[n] := \text{Ker } A_n$ と定めると、第 n Milnor 不変量と呼ばれるモノイド準同型

$$\mu_n: \mathcal{S}_\ell^{\text{fr}}[n] \rightarrow \varpi / \varpi_2 \otimes_{\mathbb{Z}} \varpi_n / \varpi_{n+1}, \quad (B, \sigma) \mapsto \sum_{i=1}^\ell x_i \otimes s_{-,*}^{-1}(\lambda_i)$$

が定義できる。ここに λ_i は σ の枠から決まるロンジチュードである。

これを $\tilde{Z}(\text{MJ}_w^{-1}(B, \sigma))$ と関連付けるために、以下の可換図式において $\mu_n(B, \sigma)$ ($n \geq 2$) に対応する $\mathcal{A}_{n-1}^{t,c}([\ell]^*)$ の元 (連結な樹状の Jacobi 図の和) に着目し、 $\mu_n^A(B, \sigma)$ と書く。

$$\begin{array}{ccccccc} \text{Im } \mu_n & \hookrightarrow & (\varpi / \varpi_2 \otimes \varpi_n / \varpi_{n+1}) \otimes \mathbb{Q} & & & & \\ \downarrow & & \downarrow \cong & & & & \\ 0 \longrightarrow & \mathcal{A}_{n-1}^{t,c}([\ell]^*) & \xrightarrow{\eta_{n-1}} & \mathbb{Q}[\ell]^* \otimes_{\mathbb{Q}} \text{Lie}_n([\ell]^*) & \xrightarrow{[-, -]} & \text{Lie}_{n+1}([\ell]^*) & \longrightarrow 0 \end{array}$$

$$\text{comm} \left(\begin{array}{c} c_1 \quad c_2 \quad c_3 \quad c_4 \\ \diagdown \quad \diagup \quad \diagdown \quad \diagup \\ \quad \quad \quad \vee \\ \quad \quad \quad \downarrow \\ \quad \quad \quad v \end{array} \right) = [c_1, [[c_2, c_3], c_4]]$$

例 3.1 ($\ell = 3, n = 2$) 上記の可換図式において,

$$D_1 := \begin{array}{c} 2^* \\ \vdots \\ \text{---} 3^* \\ \vdots \\ 1^* \end{array} \xrightarrow{\cong^{-1} \circ \eta_1} x_1 \otimes [x_2, x_3] + x_2 \otimes [x_3, x_1] + x_3 \otimes [x_1, x_2].$$

$$D \mapsto (D/i^- \mapsto \rho_w(i^-), \ i^+ \mapsto -\rho_w(i^+), \ i^0 \mapsto \rho_w(i^0))$$
$$R_{\bullet\circ}(D) = (D/1^- \mapsto 1^*, 1^+ \mapsto -2^*, 1^0 \mapsto 3^*).$$
$$\emptyset + R_n^{-1}(\mu_n^A(B, \sigma)) \in \mathcal{A}_{\leq n}^Y(|g]^+ \cup |g]^- \cup |b]^0)$$
$$\tilde{Z}_{\leq n}^{Y,t}(\mathrm{MJ}_w^{-1}(M, \sigma)) = \emptyset + x \quad (\mathrm{i}\text{-deg } x = n - 1)$$

この形の定理は最初に Kontsevich 不変量に対して発見され [5, Theorem 6.1], その後 Kontsevich-LMO 不変量 [8, Theorem 3], LMO 関手 [4, Theorem 8.18] の順に発展した. 尚, 定理 3.2 は [4] と同様に証明できる.

$$\log_{\square} \tilde{Z}^Y(\mathrm{MJ}_{\bullet}^{-1}(\sigma)) = \emptyset + \begin{array}{c} 1^+ \\ \vdots \\ \text{---} \bullet \text{---} \\ \vdots \\ 1^- \end{array} 1^0 + (\mathrm{i}\text{-deg} > 1)$$

が得られる．このとき定理 3.2 より $\mu_2^A(\sigma) = -D_1$ であり，さらに例 3.1 より

$$\mu_2(\sigma) = x_1 \otimes [x_3, x_2] + x_2 \otimes [x_1, x_3] + x_3 \otimes [x_2, x_1]$$

と求まる．

折角なので，これを用いて閉包 $\hat{\sigma}$ (Borromean 環) の長さ 3 の Milnor 不変量を求めよう． $\mu_2(\sigma)$ に Magnus 展開

$$\theta: \varpi \rightarrow \mathbb{Z}\langle\langle X_1, \dots, X_\ell \rangle\rangle, \quad x_i \mapsto 1 + X_i$$

を適用し，2 次の項を拾うと

$$\begin{aligned} & x_1 \otimes ((1 + X_3)(1 + X_2)(1 + X_3)^{-1}(1 + X_2)^{-1})_{\deg=2} + (\text{cyclic permutations}) \\ & = x_1 \otimes (X_3X_2 - X_2X_3) + x_2 \otimes (X_1X_3 - X_3X_1) + x_3 \otimes (X_2X_1 - X_1X_2). \end{aligned}$$

ここで各項の添字と係数を読むことで，よく知られた結果

$$\mu_{\hat{\sigma}}(j_1, j_2; i) = \begin{cases} -\text{sgn}(j_1 \ j_2 \ i) & \text{if } \{j_1, j_2, i\} = \{1, 2, 3\}, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

が得られる．

4. 補遺

講演では割愛したが，整ホモロジー球面 Y とその中の向き付けられた枠付き結び目 K から自然に構成されるコボルディズム [3, § 2.2] に対し，次が証明できた．

命題 4.1 Y , K を上述のものとするとき，自然な同型 $\mathcal{A}(\downarrow) \cong \mathcal{A}(\circ)$ の下で，

$$\chi_{[1]^0} \tilde{Z}(C(Y, K)) = Z^{\text{K-LMO}}(Y \setminus \text{Int } D^3, K) \# \nu$$

が成り立つ．

今後は $\tilde{Z}$ の性質を研究すると共に，その応用を見出だしたい．尚，講演後の 12 月 30 日，本研究と関連する論文 [6] が arXiv に投稿された．

参考文献

- [1] D. Bar-Natan, S. Garoufalidis, L. Rozansky and D. P. Thurston, *The Århus integral of rational homology 3-spheres. I. A highly non trivial flat connection on S^3* , Selecta Math. (N.S.) **8** (2002), no. 3, 315–339.
- [2] D. Bar-Natan, S. Garoufalidis, L. Rozansky and D. P. Thurston, *The Århus integral. II. Invariance and universality*, Selecta Math. (N.S.) **8** (2002), no. 3, 341–371.
- [3] J. C. Cha, S. Friedl and T. Kim, *The cobordism group of homology cylinders*, Compos. Math. **147** (2011), no. 3, 914–942.

- [4] D. Cheptea, K. Habiro and G. Massuyeau, *A functorial LMO invariant for Lagrangian cobordisms*, *Geom. Topol.* **12** (2008), no. 2, 1091–1170.
- [5] N. Habegger and G. Masbaum, *The Kontsevich integral and Milnor’s invariants*, *Topology* **39** (2000), no. 6, 1253–1289.
- [6] R. Katz, *Elliptic associators and the LMO functor*, preprint (2014) [arXiv:1412.7848](https://arxiv.org/abs/1412.7848).
- [7] T. T. Q. Le, J. Murakami and T. Ohtsuki, *On a universal perturbative invariant of 3-manifolds*, *Topology* **37** (1998), no. 3, 539–574.
- [8] I. Moffatt, *The Århus integral and the μ -invariants*, *J. Knot Theory Ramifications* **15** (2006), no. 3, 361–377.