

高次 Blanchfield pairing の図的計算法にむけて

野坂 武史¹ (九州大学 数理学研究院)

概要

本稿の目的は、講演で曖昧にした陳述の明記と講演内容の解説である。論文 [N2] の紹介でもある。

主旨は次の3点から成る: (1) 相対カップ積に帰着する研究方針 (2) 古典版 Blanchfield ペアリングのカンドルによる復元 (3) Casson-Gordon 符号数の差分に関する図式的計算法を明記する事。

1 導入. 高次 Blanchfield ペアリングの背景, 動機づけ, 本稿の構成

本節では, Blanchfield ペアリングの背景をざっと触れ, そのあと本稿の方針を述べる。

Blanchfield ペアリングとは, 平たく言えば「 $S^3 \setminus K$ の良い被覆空間上での Seifert 膜による交差形式」の事である。古典版として [Bla] に始まり, 結び目論で (高次結び目では特に) 長く研究された ([Hil] 参照)。非可換を係数としたペアリングもあり, その3次元の特殊版として, [Co] で調べられた高次版ペアリングもある。その高次版ペアリングは, Cochran-Orr-Teichner[COT] による次の有名な (有理版) 可解フィルターに役立った:

$$\cdots \subset \mathcal{F}_{(n.5)} \subset \mathcal{F}_{(n)} \subset \cdots \subset \mathcal{F}_{(1.5)} \subset \mathcal{F}_{(1)} \subset \mathcal{C}$$

ここで, $\mathcal{C}$ は位相的コンコルダンス群であり, このフィルターは $\mathcal{C}$ に階層的な研究指針を提示した。但し, 彼らの議論は具体的計算に程遠く, 定量的な数に落とすには困難が伴う。未解明な事項が多く難しい。

本研究は, 高次 Blanchfield ペアリングを結び目図式から計算可能にする試みである。その基本方針は, 相対カップ積への帰着である。実際, もしこの帰着が成功すれば, 2 節の様に図式から計算可能になる。本研究はここに着目し, 上記のフィルター順に敢行した。

本稿で紹介したい事項は, $n = 1$ と $n = 1.5$ における結果である。つまり, 古典版ペアリング (3 節) と Casson-Gordon 符号数の差分 (4 節) に関して, 図的計算法を与えた。成果として, トーラス結び目の古典版ペアリングを初めて決定づけた (定理 3.3)。後者の Casson-Gordon 符号数に関しては, 計算機にかけられる線形代数的な計算法を与えた (しかし元の定義が長い為, 結果も短くない)。なお, 高次のペアリング ($n \geq 2$) に対する結果を講演でサラッと紹介したが, 紙幅の事情により本稿で扱えず別の機会に紹介したい。

さて, これより本論へ進めるが, 本稿は講演内容の厳密な明記を骨子とした。3 節までは総論の為, 多くのトポロジストに読まれるよう配慮した。他方 4 節は, 専門家むけに近い, テクニカルな各論になっている。

2 準備; 相対カップ積の図的計算法 & カンドルコサイクル不変量.

本節では, 本稿での主役「相対カップ積」を明記し, その「図的計算」を矢継ぎ早に解説する。

まず相対カップ積を説明する。その入力と出力事項は下記の通りである。

相対カップ積の定義. 表現 $f: \pi_1(E_L) \rightarrow G$ の不変量として ($E_L \stackrel{\text{def}}{=} S^3 \setminus L$)

入力 $M: A$ 上の右 G -加群, (ここで A は involution⁻ 付き可換環)

$\psi: M^2 \rightarrow A$, 双線型関数 s.t. $\psi(x \cdot g, y \cdot g) = \psi(x, y)$, $\psi(\bar{a}x, y) = a\psi(x, y) = \psi(x, ay)$.

Σ_ℓ : ℓ -番目の絡み目成分を境界にもつ Seifert 膜. (これは $H_2(E_L, \partial E_L)$ の 2-class と考える)。

出力 局所係数コホモロジー $H^1(E_L, \partial E_L; M)$ 上の双線型形式. 厳密には, 次の合成射で定義される。

$$\smile_\psi: H^1(E_L, \partial E_L; M)^{\otimes 2} \xrightarrow{\smile} H^2(E_L, \partial E_L; M^{\otimes 2}) \xrightarrow{\bullet \cap \Sigma_\ell} M \otimes M \xrightarrow{\langle \psi, \bullet \rangle} A. \quad (1)$$

この様に位相幾何の基本事項から定義される。しかし定義からして, 局所系相対コホモロジーやそのカップ積は思弁的で, 定量的に計算不可能に思える。その為, 忌避され研究前例や計算例は非常に少なかった (と思う)。

¹ 本研究は, (課題番号:25800049) からの助成を受けたものである。 E-mail address: nosaka@math.kyushu-u.ac.jp

2.1 カンドルと彩色の復習と、基礎となる定理

ところがカンドルを通れば、カップ積が図式から計算できる。この筆者の結果 (定理 2.8) を解説したい。カンドルとは集合 X と二項演算 $\triangleleft$ の組だった。その定義は重要でない (別講参照)。今回扱うカンドルの例示から始める。

例 2.1 (アレクサンダーカンドル). $\mathbb{Z}[T^{\pm 1}]$ -加群 X は, $x \triangleleft y \stackrel{\text{def}}{=} y + T(x - y)$ によってカンドルとなる。図的には「 $x \triangleleft y$ は, y を中心にした $1:T$ 等分点」とみなせる (左下图参照)。

例 2.2 ((群の) 共役カンドル). 任意の群 G は, 二項演算 $g \triangleleft h \stackrel{\text{def}}{=} h^{-1}gh$ によってカンドルとなる。

さらに双例を包摂するカンドルが Ishii-Iwakiri-Jang-Oshiro [IIJO] により考案されている:

例 2.3 (アレクサンダーカンドルの G 族). 先ほどと同様に, M を右 G -加群とする。すると次の二項演算によって, 直積 $X = M \times G$ はカンドルになる。

$$\triangleleft: (M \times G) \times (M \times G) \longrightarrow M \times G, \quad (x, g, y, h) \longmapsto ((x - y) \cdot h + y, h^{-1}gh).$$

イメージとしては, 「 $x \triangleleft y$ は, y を中心に h での作用をした行き先」とみなせる (右下图参照)。



彩色を復習する。 D を絡み目図式とし, X をカンドルとする。 X -彩色とは写像 $\mathcal{C}: \{D \text{ の over arc} \} \rightarrow X$ のことで図式 D の各交点に対して下图を満たすものをいう。 X -彩色全体の集合を $\text{Col}_X(D)$ と書く事にする。

$$\begin{array}{c} \alpha \quad \beta \\ \diagdown \quad \diagup \\ \gamma \end{array} \quad \mathcal{C}(\gamma) = \mathcal{C}(\alpha) \triangleleft \mathcal{C}(\beta)$$

本稿で重要な例をあげる。

例 2.4. X を群 G とし, 例 2.2 の共役カンドル構造を入れる。すると X -彩色 $\mathcal{C}$ は, ウィルティンガー表示から (つまり, アークに対しそのメリディアンを対応させる事で), 準同型 $f_{\mathcal{C}}: \pi_1(S^3 \setminus L) \rightarrow G$ が一意的に得られる。よって, 次の一対一対応が得られる。

$$\text{Col}_X(D) \xrightarrow{1:1} \text{Hom}(\pi_1(S^3 \setminus L), G), \quad \mathcal{C} \longmapsto f_{\mathcal{C}}.$$

こうして, 準同型 $f: \pi_1(S^3 \setminus L) \rightarrow G$ がカンドルで扱える為, リフトの概念も彩色の言葉で書ける。実際

定義 2.5. 絡み目図式 D を固定し, 準同型 $f: \pi_1(S^3 \setminus L) \rightarrow G$ を G -彩色 $\mathcal{C}_f$ と見做す。

例 2.3 のカンドル $X = G \times M$ をとる。 f 上の X -彩色とは, X -彩色 $\tilde{\mathcal{C}}: \{D \text{ の over arc} \} \rightarrow X$ で $p_G \circ \tilde{\mathcal{C}} = \mathcal{C}_f$ となるものをいう。ここで $p_G: X \rightarrow G$ は射影である。

f 上の X -彩色全体の集合を $\text{Col}_X(D)_f$ と書く事にすると, この $\text{Col}_X(D)_f$ は R -加群になる。実際, X -彩色の集合は定義より, 直積 $X^{\# \{D \text{ の arc} \}}$ の部分集合と思える事に注意すると, $\text{Col}_X(D)_f$ は $M^{\# \{D \text{ の arc} \}}$ の部分集合 (特に部分加群) となるからである。

次に論文 [N1] の一結果を言及しよう。任意の G -不変な $\psi: M \times M \rightarrow A$ に対し, 次で定める関数を考える:

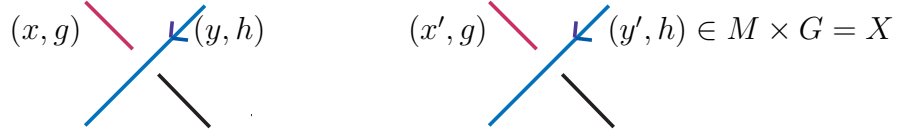
$$\Psi: X \times X \rightarrow A; \quad ((x, g), (y, h)) \longmapsto \psi(x - y, y - y \cdot h^{-1}). \quad (2)$$

この関数はカンドル 2-コサイクルというものになる。つまり, 次式を満たすことが確かめられる:

$$\Psi(a, c) - \Psi(a, b) = \Psi(a \triangleleft b, c) - \Psi(a \triangleleft c, b \triangleleft c), \quad \Psi(a, a) = 0 \quad \forall a, b, c \in X.$$

これを用い, X -彩色につがった重み付けをしよう。上記の様に, G -彩色 $\mathcal{C}_f$ を固定する。そして, f 上の X -彩色をふたつ $\mathcal{C}, \mathcal{C}'$ 用意する。すると各交点 τ の付近では下图の様になっているはずである。

そこで上記の Ψ に感化され, τ の重みを $\psi_{\tau}(\mathcal{C}, \mathcal{C}') := (-1)^{\epsilon_{\tau}} \psi(x - y, y' - y' h^{-1}) \in A$ と定義する。ここで $\epsilon_{\tau} \in \{\pm 1\}$ は交点の正負である。さらに, それらを足し上げよう:



定義 2.6 ([N2]). (双線型関数に拡張された) f のコサイクル不変量を, 次として定義する:

$$\mathcal{Q}_\psi : \text{Col}_X(D_f) \times \text{Col}_X(D_f) \longrightarrow A, \quad (\mathcal{C}, \mathcal{C}') \longmapsto \sum_{\tau: \ell\text{-番目絡み目成分上の交点}} \psi_\tau(\mathcal{C}, \mathcal{C}').$$

注意 2.7. この対角成分の制限, つまり $\mathcal{C} = \mathcal{C}'$ のものが, オリジナルの定義である [CJKLS].

すると, この双線型関数こそが, 上枠内の相対カップ積 [定義は (1) 参照] を完璧に看破する. 明確には次の通りである:

定理 2.8 ([N2]. 証明略). 以上の用語や設定をもちいる. このとき, 次の A -加群同型が存在する:

$$\text{Col}_X(D_f) \cong H^1(E_L, \partial E_L; M) \oplus M.$$

ここで E_L は $S^3 \setminus L$ のこと. そのうえ, 右辺の 2 元 $\mathcal{C} = (\alpha, x)$, $\mathcal{C}' = (\beta, y)$ に対して, 次の等式が成立する:

$$\mathcal{Q}_\psi(\mathcal{C}, \mathcal{C}') = \alpha \smile_\psi \beta \in A.$$

この定理の意義は, 前述通り, 思弁的で等閑視されがちな相対カップ積が図式から計算可能になった点である. 従って, 相対カップ積を単走的な研究を将来しても, この定理が実体的な具体性と安心感を保障してくれる訳である. この意義と心性に倣って, 次に話を展開しよう.

3 古典版 Blanchfield ペアリング VS カンドル 2-コサイクル不変量

この節では, f を結び目群のアーベル化 $\pi_K \rightarrow \mathbb{Z} =: G$ とした場合を考察する. そして, 上記の $\mathcal{Q}_\psi$ が古典版 Blanchfield ペアリングを完全に復元する事をみる. なお 4 節に関係ないので, 本節は読み飛ばしても良い. 古典版ペアリングとは, アレクサンダ加群からのエルミート双線型形式であった (定義は [Tro1, Hil] 参照):

$$\text{Bl}_K : H_1(S^3 \setminus K; \mathbb{Z}[t^{\pm 1}])^{\otimes 2} \longrightarrow \mathbb{Z}[t^{\pm 1}]/(\Delta_K).$$

一方で, $\mathbb{Z}$ の生成元を T と書けば, 考えているカンドル $G \times M$ はまさに, 例 2.3 のアレクサンダーカンドルである事に注意しよう. すると, 実際, 次の定理の様に, 精確で綺麗な形で復元することに成功した.

定理 3.1. D を結び目 K の図式とし, Alexander 多項式を Δ_K とかく. さらに $X = \mathbb{Z}[t^{\pm 1}]/(\Delta_K)$ という形のアレクサンダーカンドルをとる. また $\psi_0 : X \otimes X \rightarrow \mathbb{Z}[t^{\pm 1}]/(\Delta_K)$ を $\psi_0(x, y) = \bar{x}y$ と定義する.

この時, ある同型 $\text{Col}_X(D) \cong X \oplus H_1(S^3 \setminus K; \mathbb{Z}[t^{\pm 1}])$ があって, 双線型形式として次式が成立する:

$$\mathcal{Q}_{\psi_0}((x, a), (y, b)) = \frac{1+t}{1-t} \cdot \text{Bl}_K(a \otimes b) \in \mathbb{Z}[t^{\pm 1}]/(\Delta_K),$$

ここで 2 元 (x, a) , (y, b) は $X \oplus H_1(S^3 \setminus K; \mathbb{Z}[t^{\pm 1}])$ のものである.

注意 3.2. 右辺内の定数倍は必要かつ本質的である. 実際, (左) 右辺は (歪) エルミートであるため, 両者をねじって結ぶ必要がある [要点は $(1+t)/(1-t)$ の共役がその負倍になる点である]. またこの定数倍は復元に問題ない. なぜなら判別式 $\Delta_K(-1)$ は非零で Bl_K は非退化だから, 上式内で $t+1$ が割れるからである. なおこの証明は, 講演スライドの通り, Seifert 行列による両辺の比較である (詳細略. 本質的に [Tro2] の議論).

よって左辺 $\mathcal{Q}_{\psi_0}$ を通ずれば Bl_K の計算可能になった. 定義 2.6 からして, 計算過程にザイフェルト曲面 (行列) を一度も書き下す必要がない. この特長は既存の Bl_K の計算法 ([Tro1] 参照) に比べ, 進歩である.

この成果を示す例として, トーラス結び目 $T_{m,n}$ の当古典版ペアリングを初めて決定できた. ここで事実 $\Delta_K = (t^{nm} - 1)(t - 1)/((t^n - 1)(t^m - 1))$ と Alexander 加群の形 $\mathbb{Z}[t]/(\Delta_K)$ を想起しておこう.

定理 3.3. $an + bm = 1$ となる整数 $(n, m, a, b) \in \mathbb{Z}^4$ を固定し, $K = T_{m,n}$ とする. この時, 次式が成立する:

$$\text{Bl}_K(y_1, y_2) = \frac{nm}{(1+t^{-1})(1-t^{bm})(1-t^{an})} \cdot \bar{y}_1 y_2 \in \mathbb{Z}[t^{\pm 1}]/(\Delta_K),$$

ここで $y_1, y_2 \in H_1(S^3 \setminus T_{m,n}; \mathbb{Z}[t^{\pm 1}]) \cong \mathbb{Z}[t^{\pm 1}]/(\Delta_K)$ とした.

この証明は 1 頁内で納まるほど簡潔であるが省略する. なお「この右辺の係数が, $\mathbb{Z}[t^{\pm 1}]/(\Delta_K)$ に入る様に割れる」理由は, 当証明をたどるか, ロピタルの定理を用いれば確かめられる. また, Seifert 種数が $(n-1)(m-1)/2$ なので, 当定理は, 既存のアプローチと比較すれば, 非常にシンプルな事がわかる.

さらに, 議論を進める事で定理 3.4 を示せた: この帰結として, アレクサンダーカンドルの 2-コサイクル不変量が S -同値の完全不変量であるうえ, Blanchfield ペアリングによって位相的に意味づけられた事になる.

定理 3.4. ふたつの結び目 K_1, K_2 が S -同値である事の必要十分条件は, 「 K_1 と K_2 に関して, 任意のアレクサンダーカンドルの任意のカンドル 2-コサイクルに付随する 2-コサイクル不変量が等価」となる事である.

証明. 十分条件: 定理 3.1 により, K_1 と K_2 の古典版ペアリングを復元しよう. 当ペアリングは S -同値の完全不変量だった [Tro1] から, K_1 と K_2 は S -同値である.

必要条件: 周知の事実 [NS] として K_1 と K_2 はダブルデルタ移動により移り合う. 故に, その局所的な移動での不変量の不変性を示せばよい. これは 2 次カンドルホモロジーの結果を用いて証明できる (詳細略). $\square$

本節をまとめよう. 今われわれは, f を最も単純なアーベル化 $\pi_K \rightarrow \mathbb{Z}$ を考えてきた. にもかかわらず上記の様に, 位相的な結果をいろいろ得る事が出来た. 前節の枠の設定が有力手段となる事を示唆するものである. だから, 一般に非可換的な f を設定した研究に, 進展を期待しても良いだろう. その立証例が次節である.

4 Casson-Gordon 符号数の差分に関する図的計算法

本節の主結果は「“generic”な $w \in \mathbb{C}$ に関する Casson-Gordon 符号数の差分について図的計算法を与えた」事である. 論文 [N2] にその計算法を載せたが, その符号数の定義が少し長い為, 結論の手続きは短くない.

そこで本節では, 計算法の明示式 (節 4.2) にむけ速成な記述を試みた. その為まず節 4.1 で CG 符号数をざっくり復習する. その後, 4.3 節で証明の概略を行い, アイディアを説明する. 4.4 節は付録である. 本節は正統的な道具立てに基づくが, しかし 1 節の予告どおり, テクニカルな内容で簡単ではないと思われる.

なお本結果のアイディアと方針は, [KL, 7 節] に準拠した. 筆者の仕事は, 彼らの考察を完結させ証明を与え, 図的計算法に還元した事である. ただしこの実行過程で, 補完と証明をそこそこ要した点は強調しておく.

4.1 Casson-Gordon 不変量の復習. 入出力について

Casson-Gordon 不変量 [CG] を手早く説明する. 但し元論文では, それが何の位相的コンコルダント不変量かが曖昧であったが, Gilmer [Gi] により, その入出力は, おおまかに次の通りに整理される².

Casson-Gordon 符号数の入出力. K は結び目とする.

入力 $(p, d) \in \mathbb{N}^2$: 互いに素である素数冪. 絶対値 1 の複素数 $w \in \mathbb{C}$.

$\chi: H_1(B_q; \mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{Z}/d$, “Gilmer 指標となる”群準同型 (B_q は K に沿う q -重巡回分岐被覆).

出力 有理数 $\text{Sign}_w(K, \chi) \in \mathbb{Z}[1/q]$.

だが, これらの詳細を明記しようとすると, 次のふたつの困難にぶつかる (それ故, 計算例は非常に少ない).

- (1) 準同型 χ が “Gilmer 指標” となるか否かが判定しづらい (そもそも定義が大変. 詳細は [COT, 9 節]).
- (2) 当該の値 $\text{Sign}_w(K, \chi)$ は, ある 4 次元多様体 W の局所係数の符号数として定義される.

² コンコルダンス不変量とするには, [COT, §9] により, 代数的コンコルダントな結び目に制限する必要がある. ここで結び目が代数的コンコルダントとは, 代数的コンコルダンス指数が 0 をいう. 古典的な事実として, これは「2 次形式 $V + V'$ が Witt 群 $W(\mathbb{Q}) \cong (\mathbb{Z}/2)^\infty \oplus (\mathbb{Z}/4)^\infty$ の中で 0 であり, 局所符号数が全て 0 となる事」と同値である.

本研究は (2) の解決として、図式から計算する手段を提唱する。ポイントはこの 4 次元多様体 W が計算過程に全く必要ない点である。但し、 $w = 1$ の時は成功しておらず (この点は節 4.2 末を参照)、計算可能に成功したのは『差分 $\text{Sign}_w(K, \chi) - \sigma(K, \chi)$ 』である。なお、(1) の問題を回避する有力手段は [Gi, K LH] にあるが、Gilmer 指標が自明準同型しかない場合もある為、CG 符号数の汎用性と有用性は定かでないと思われる。

4.2 図的計算法の厳密な明示式.

今から目標の計算法を紹介する (定理 4.2). とはいえ、天下りので少々冗長な点はご海容頂きたい。

まず、2 節の枠にあった f の設定から始める。上記の入力対象 χ , w を仮定する³。また ζ_d を原始乗根 $\exp(2\pi\sqrt{-1}/d) \in \mathbb{C}$ とし、入射 $\mathbb{Z}/d \hookrightarrow GL_1(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^\times$ も固定する。そして、 E_q を K にそった q 重巡回被覆空間とすると、入射 $i: E_q \rightarrow B_q$ が取れる。よって合成 $\chi \circ i_*: \pi_1(E_q) \rightarrow \mathbb{Z}/d \hookrightarrow GL_1(\mathbb{C})$ を得る。また、メリディアン $\mathfrak{m}$ を固定する事で、半直積 $\pi_K \cong \pi'_K \rtimes \mathbb{Z}$ を得る。すると交換子部分群 π'_K から $\pi_1(E_q)$ への単射が存在するので、合成 $\chi \circ i_*: \pi_1(E_q) \rightarrow GL_1(\mathbb{C})$ は誘導表現 $f_\chi: \pi_K \rightarrow GL_1(\mathbb{C}[s]/(s^q - 1)) \hookrightarrow GL_q(\mathbb{C})$ を与える。総じて、目標だった f を f_χ と設定する。

次に M を設定する。振れアレクサンダー多項式 $\Delta_f \in \mathbb{C}[t^{\pm 1}]$ をおく⁴。この時、非零である事が知られている [CG, KL]。そこで、局所系 M_Δ を q -個直積 $(\mathbb{C}[t^{\pm 1}]/\Delta_f)^q$ と定める。以上の説明は解りづらいと思われるため、局所系 M_Δ への π_K の作用に関し、行列表示を明記しておこう：

$$f_\chi(g, n) := t^n \begin{pmatrix} \zeta_d^{\chi(g)} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \zeta_d^{\chi(g \cdot \mu)} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \zeta_d^{\chi(g \cdot \mu^{q-1})} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}^n \in GL_q(\mathbb{C}[t^{\pm 1}]/\Delta_f)$$

ここで $(g, n) \in \pi'_K \rtimes \mathbb{Z}$ であり、「 $\cdot \mu$ 」は π'_K への $\mathfrak{m}$ による共役作用を表す。

以上の設定を以下統一する。そこでまず、 f_χ 上のカラリングに関する位相的意味を、筆者は与えた：

補題 4.1. X_q を B_q から K に沿う 0-手術により得られる閉 3 次元多様体とする。アーベル化の自由パートは $\alpha: X_q \rightarrow \mathbb{Z}$ なので、巡回被覆空間を Y_∞ とかこう。この時、次の $\mathbb{C}[t^{\pm 1}]$ -加群同型写像が自然に存在する：

$$H^1(S^3 \setminus K, \partial S^3 \setminus K; M_\Delta) \cong H^1(Y_\infty; \mathbb{C}_\chi), \quad (\text{これは有限次元 } \mathbb{C}\text{-vector 空間}),$$

ここで右辺内の $\mathbb{C}_\chi$ は、 Y_∞ に χ を引き戻した局所系係数を意味する。

コサイクル不変量に話をつなげよう。次式による双線型関数 $\psi_q: (M_\Delta)^2 \rightarrow \mathbb{C}[t]/(\Delta_f)$ を用意する：

$$\psi_q((x_1, \dots, x_q), (y_1, \dots, y_q)) = \sum \overline{x_i} y_i.$$

ここで共役 $\overline{at^n}$ は $\overline{a}t^{-n}$ で定める ($a \in \mathbb{C}$)。すると定義 2.6 によれば、コサイクル不変量 $\mathcal{Q}_{\psi_q}$ が得られる。下記の定理 4.2 は「(長たらしいが) この $\mathcal{Q}_{\psi_q}$ から差分的 CG 符号数を抽出できる」ことを主張する。

この主張を遂行するにあたり、まずは [Tro1, §2] や [Neu, §11] の用語を復習する。 $\mathbb{F}$ を標数 0 の可換体として、 $\mathbb{F}[t]_+$ を、形式的 Laurent 冪級数 $\sum_{i \geq n} a_i t^i$ with some $a_i \in \mathbb{F}$, $n \in \mathbb{Z}$ で構成される環とする。すると非零元 $x \in \mathbb{F}[t^{\pm 1}] \setminus \{0\}$ は、その環 $\mathbb{F}[t]_+$ の中で可逆元である。だから、商体からの自然な入射 $i_+: \mathbb{F}(t) \hookrightarrow \mathbb{F}[t]_+$ を得る。そこで、 $x \in \mathbb{F}(t)$ に対して、 $\text{tr}(x)$ を $i_+(x)|_{t=0} - i_+(\bar{x})|_{t=0}$ によって定めよう、但し、記号 $|_{t=0}$ は t^0 -の係数を表す。すると、このトレース写像は well-defined な $\mathbb{F}$ -線型写像を次のように誘導する：

$$\text{Tr}: \mathbb{F}[t^{\pm 1}]/(\Delta_f) \hookrightarrow \mathbb{F}(t)/\mathbb{F}[t^{\pm 1}] \xrightarrow{\text{tr}} \mathbb{F}; \quad x \mapsto [x/\Delta_f] \mapsto \text{tr}([x/\Delta_f]).$$

³実は、この χ は、 $\exists a \in \mathbb{Z}$ で $X = \mathbb{Z}[t]/(d, t - a)$ という形の アレクサンダーカンドルでによる X -彩色で書ける事が容易に解る。特に χ は図式でかけれる。だから、指標 χ を抽象的に思わなくてよい。

⁴ここでの定義は以下のように：振れホモロジー $H_1(\pi_K; \mathbb{C}[t^{\pm 1}])$ は $\mathbb{C}$ -有限次元である (事が知られる) から、単因子論より、 $\mathbb{C}[t^{\pm 1}]/(e_1) \oplus \cdots \mathbb{C}[t^{\pm 1}]/(e_m)$ に $\mathbb{C}[t^{\pm 1}]$ -加群同型である。そこで多項式 $e_1, \dots, e_m$ らの最少公倍数を Δ_f と定める。加えて、振れライデマイスターーションの双対定理から、単項イデアルの等式 $(\Delta_f) = (\overline{\Delta_f})$ が知られている

[Neu, §2-3] の用語も復習する. 一般に, 有限次元 $\mathbb{C}$ -ベクトル空間 V に $\mathbb{Z} = \langle \tau^{\pm n} \rangle$ が作用していたとする. そこで $z \in \mathbb{C}$ に対し, $(\tau - z)$ -不変な部分空間 V_z を考える, 即ち, $V_z := \{v \in V \mid v(\tau - z)^k = 0 \text{ for } \exists k\}$. さらに, V が歪 Hermite 双線型形式 b を持つとき, 実数値 $\lambda(V, b) \in \mathbb{R}$ を和 $\sum_{z: |z|=1} \lambda(V_z, b)$ として定める. 但し,

$$\lambda(V_z, b) = \begin{cases} (2a - 1) \cdot \text{Sign}(V_z, \sqrt{-1}b), & \text{if } z = \exp(2\pi\sqrt{-1}a) \text{ with } 0 < a < 1, \\ -\text{Sign}(V_1, \sqrt{-1}b_{(1)}), & \text{if } z = 1, \end{cases}$$

ここで, 右辺内の $b_{(1)}$ は $b_{(1)}(x, y) = b(\tau x - \tau^{-1}x, y)$ と定義しておく.

以上の設定に代入し, 定理 4.2 を明記しよう. まず, V を補題 4.1 の $H^1(Y_\infty; \mathbb{C}_\chi)$ とする. すると, Y の被覆変換によって, V に $\mathbb{Z}$ が作用する. また注意する事に, 合成 $\text{Tr} \circ \mathcal{Q}_{\psi_q}$ が V 上の歪エルミートな双線型形式となる (これを $b_{\chi, q}$ とかこう). また他方で, $w \in \mathbb{C}$ に対し, 写像 $\hat{\alpha}_w : \pi_1(X_q) \rightarrow \mathbb{C}$ を $\gamma \mapsto w^{\alpha(\gamma)}$ によって定義する. この $\hat{\alpha}_w$ により $\mathbb{C}$ をテンソルする事で, 先程の $\mathbb{Z}$ の作用が, $H^1(Y; \mathbb{C}_\chi) \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C} \cong V$ 上のものとして, 捻る事が出来る. この空間を $(V \otimes \tau, b_{\chi, q} \otimes \hat{\alpha}_w)$ と書こう. するとやっと, 定理が陳述できた:

定理 4.2. 自明でない Gilmer 指標 χ をとる. また $\frac{d}{dt} \Delta_f|_{t=1} \neq 0$ と仮定する⁵. 絶対値 1 である $w \in \mathbb{C}$ を “generic” とする (定義は後述). この時, 次の左辺の差分的 CG 符号数 (定義は後述) は次の等式をみたす.

$$\text{Sign}_w(CG(K, \chi)) - \sigma(K, \chi) = \lambda(V, b_{\chi, q}) - \lambda(V \otimes \tau, b_{\chi, q} \otimes \hat{\alpha}_w) \in \mathbb{Z}[1/q].$$

本定理の結論をまとめよう. 定理 2.8 によれば, 右辺はカンドルコサイクル不変量から計算可能である. そして, この第二項 $\sigma(K, \chi)$ は Atiyah-Singer G -符号数定理により計算できうる場合が多々ある. 例えば $q = 2$ かつ B_q がレンズ空間である時に, [CG] の 185–188 頁に計算結果がある (しかし値は容易でない). 従って, 入力事項が与えられ G -符号数定理が使える状況では, 原理的には CG 符号数が図式から計算できる事になった. それも構成から, 計算機にのりそうな枠組みである.

4.3 補題 4.1 と定理 4.2 の証明

この証明方針は [Neu] の主定理への帰着である. その定理とは概して「局所系の符号数の差分は, 境界部のカップ積の捩れ符号数の差分に等価」というものだった. しかし, かれこれ強い条件下の主張でもあった. だから帰着に向け, この条件を満たすための設定と使用上のチェックは, 慎重にすべきである.

手始めに補題 4.1 を証明しておこう.

補題 4.1 の証明方針. 3 つの同型射を構成する事で, 目標の同型射を作ろう. 指標 χ と $\bar{\alpha} : \pi_1(X_q) \rightarrow \pi_1(E_q) \rightarrow \mathbb{Z}$ により定義される局所系 $\mathbb{C}_\chi[t]/(\Delta_f)$ を, M_χ と略記しよう. これは E_q や X_q の局所系と思える. すると, 表現 f_χ は指標 χ の誘導表現だったのだから, 有名な Shapiro の補題 ([KLH] 参照) によって, 環同型

$$p^* : H^*(S^3 \setminus K, \partial S^3 \setminus K; M_\Delta) \xrightarrow{\sim} H^*(E_q, \partial E_q; M_\chi)$$

を得る事になる. 第二に, 緯線 $\mathbf{l}_K \in \pi'_K$ に対し, 定義から, $f_\chi(\mathbf{l}_K) = \text{id}$ となる事に気づこう. すると, 切除公理から, 入射 $i : E_q \hookrightarrow X_q$ は第二の同型を次の様に与える:

$$i^* : H^*(X_q, X_q \setminus \text{Int}(E_q); M_\chi) \xrightarrow{\sim} H^*(E_q, \partial E_q; M_\chi).$$

さて三番目を得る為に, 自然な写像 $\eta : (X_q, \emptyset) \rightarrow (X_q, X_q \setminus \text{Int}(E_q))$ の誘導する長完全列を考えよう:

$$H^0(X_q \setminus \text{Int}(E_q); M_\chi) \rightarrow H^1(X_q, X_q \setminus \text{Int}(E_q); M_\chi) \xrightarrow{\eta^*} H^1(X_q; M_\chi) \rightarrow H^1(X_q \setminus \text{Int}(E_q); M_\chi).$$

ここで, 両翼の補空間 $X_q \setminus \text{Int}(E_q)$ が X_q の中で経線にホモトピックな事に注意する. すると, 仮定 $\frac{d}{dt} \Delta_f|_{t=1} \neq 0$ から, 両端の項は $\mathbb{C}[t]/(1-t)$ となる. その上, 両端の写像は非自明である事も解る. また [KL] の議論から, 真ん中の二項内では $(1-t)$ が可逆であるため, η^* を同型射 $\bar{\eta}^*$ に簡単に拡張できる.

まとめよう. 合成 $\bar{\eta}^* \circ (i^*)^{-1} \circ p^*$ は同型 $H^1(S^3 \setminus K, \partial S^3 \setminus K; M_\chi) \cong H^1(X_q; \mathbb{C}_\chi)$ を誘導する. $\square$

⁵ この仮定は陳述を簡単にする為である. つまり $t = 1$ に重根を持たない仮定だが, 経験則では, 満たす場合が多い.

次に、定理 4.2 の証明を述べる。だが主張内容からして、Casson-Gordon 不変量を復習する必要がある。

そのため用語を準備する。\$M_K\$ を \$K\$ に沿う 0-手術をして得られる閉 3 次元多様体とする。同型 \$H_*(M_K; \mathbb{Z}) \cong H_*(S^2 \times S^1; \mathbb{Z})\$ に注意する。そこで、境界が \$M_K\$ となるコンパクト 4 次元多様体 \$W\$ で、境界包含が同型 \$H_1(M_K; \mathbb{Z}) \cong H_1(W; \mathbb{Z})\$ を誘導するものをとる。アーベル化 \$\hat{\alpha} : \pi_1(W) \rightarrow \mathbb{Z}\$ に付随する巡回被覆を \$W_\infty\$ と書く。\$q\$-重巡回被覆 \$W_q\$ の境界は、\$X_q\$ の \$q\$ 個コピー和集合となる事に注意しよう。すると、ボルディズム論から、入力物である \$\chi : \pi_1(B_q) \rightarrow \mathbb{Z}/d\$ は、或る \$\hat{\chi}_W : \pi_1(W_q) \rightarrow \mathbb{Z}/d\$ に拡張される ([COT, 系 9.8] 参照)。

準備を続ける。\$\chi_{\text{tri}} : \pi_1(W_q) \rightarrow GL_1(\mathbb{Q})\$ を自明準同型とする。すると入射 \$\mathbb{Z}/d \hookrightarrow GL_1(\mathbb{C})\$ を通じて、\$W_q\$ に三つの局所系ホモロジー群を得る、ここで係数環は \$\mathbb{Q}\$, \$\mathbb{C}\$ と \$\mathbb{C}(t)\$ で準同型 \$\chi_{\text{tri}}, \hat{\chi}_W\$ と \$\hat{\chi}_W \otimes \bar{\alpha}\$ により夫々ねじっている。従って、\$H_2(W_q; \dagger)\$ 上に交差形式をみつつ \$I_{\text{tri}}, I_{\hat{\chi}}\$ と \$I_{\alpha \otimes \hat{\chi}}\$ を得る。これらは定義からエルミートである。さらに、[COT, 補題 9.7] によれば、それぞれの \$H_2(W_q; \dagger)\$ はそれぞれの係数で有限次元である。

以上を基にして、**Casson-Gordon 不変量** [CG, COT] は次の元で定められる：

$$\text{CG}(K, \chi) := (I_{\alpha \otimes \hat{\chi}} - I_{\text{tri}}) \otimes (1/q) \in \text{Witt}(\mathbb{C}(t)) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[1/q],$$

ここで \$\text{Witt}(\mathbb{C}(t))\$ は商体 \$\mathbb{C}(t)\$ の (hermitian) Witt 群である。これは \$W\$ や \$\hat{\chi}_W\$ の取り方によらない。

とはいえ Witt 群は定量的によく解らない群である。そこで、“generic”な絶対値 1 の \$w \in \mathbb{C}\$ に対し、符号数 \$\text{Sign}_w(\text{CG}(K, \chi)) \in \mathbb{Z}[1/q]\$ に情報をおとすのが標準的である。ここで \$w \in \mathbb{C}\$ が **generic** であるとは、方程式 \$\Delta_f(t) = 0\$ と \$\det(I_{\alpha \otimes \hat{\chi}}) = 0 \in \mathbb{C}(t)\$ との解とならず、\$t-w\$ が \$H_2(W_q; \mathbb{C}(t))\$ 内で同型である場合をいう。ここで注意すべき事に、定義から \$\text{Sign}_w(\text{CG}(K, \chi))\$ は generic な開な各連結成分上で定値である。他方、非 generic な点は厄介で、とりわけ \$w = 1\$ は大問題である。実際 [CG] と同じく、数 \$\sigma(K, \chi) := \text{Sign}(I_{\hat{\chi}}) - \text{Sign}(I_{\text{tri}}) \in \mathbb{Z}[1/q]\$ を考えてみると、差 \$\sigma(K, \chi) - \lim_{w \rightarrow 1+0\sqrt{-1}} \text{Sign}_w(\text{CG}(K, \chi))\$ は **nullity**(非退化度) と言われ重要である。即ち、この差は CG 不変量で微妙な議論を要する原因の一つでもあり、スライス=リボン予想に関連する機微でもあったりする ([CG, 定理 3] や [Gi, 定理 1] を参照)。

しかしながら、そもそも \$\text{CG}(K, \chi)\$ が \$W\$ を用いた定義の為、符号数ですら計算が難しいと思われた。

そんななか 20 世紀末、Kirk-Livingston[KL] は、[Neu] の主定理から符号数がカップ積で再現できると推察した。しかし厳密には以下の通り、符号数の差分をとらねばならず、定理 4.4 も示す必要があった。実際、

定理 4.2 の証明。 まず上補題の証明にあった同型は、構成から環構造が保たれる事に注意しよう。また後述の定理 4.3 により、\$\text{Tr} \circ \mathcal{Q}_\psi = b_{\chi, q}\$ は \$Y_\infty\$ のカップ積とみる事が出来る。すると、[Neu, 定理 3.2] の条件をクリアする事がわかる。そこで当定理に \$\alpha = \hat{\alpha}_w\$ と \$\beta = \hat{\chi}\$ を代入すると、まさに目標の式と同じものを得る。□

4.4 付録：無限巡回被覆空間のカップ積。

Kirk-Livingston [KL, §7] の双線型写像を復習し、それを 2 節の囲いの設定に換言する (定理 4.3)。

まず一般的に \$Y\$ を有向コンパクト 3 次元多様体とする (境界は \$\partial Y \neq \emptyset\$ でもよい)。そして全射準同型 \$\alpha : \pi_1(Y) \rightarrow \mathbb{Z}\$ と表現 \$f_{\text{pre}} : \pi_1(Y) \rightarrow GL_n(\mathbb{F})\$ を固定する (ここで \$\mathbb{F}\$ は可換体)。その局所系 \$\mathbb{F}^n\$ を \$V\$ と略記し、\$\pi_1(Y)\$-不変双線型関数 \$\psi_{\text{pre}} : V \otimes V \rightarrow \mathbb{F}\$ も与えられたとする。そこで、付随する無限巡回被覆 \$p_\alpha : \tilde{Y} \rightarrow Y\$ をとり、2-クラス \$\mu_\alpha \in H_2(\tilde{Y}, \partial \tilde{Y}; \mathbb{Z})\$ を類 \$[\alpha] \in H^1(Y; \mathbb{Z})\$ のポアンカレ双対元として定める。そこで Kirk-Livingston は次の合成射で定まる双線型写像を考えた (これを \$\langle \cdot, \cdot \rangle_{\text{KL}}\$ と略記する)。

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_{\text{KL}} : H^1(\tilde{Y}, \partial \tilde{Y}; V)^{\otimes 2} \xrightarrow{\sim} H^2(\tilde{Y}, \partial \tilde{Y}; V \otimes V^{\text{op}}) \xrightarrow{\langle \psi_{\text{pre}}, \bullet \rangle} H^2(\tilde{Y}, \partial \tilde{Y}; \mathbb{F}) \xrightarrow{\cap \mu_\alpha} \mathbb{F}. \quad (3)$$

ここで、もし \$\psi_{\text{pre}}\$ が歪エルミートで、\$H^1\$ が有限次元 \$\mathbb{C}\$-空間の時、このエルミートな \$\langle \cdot, \cdot \rangle_{\text{KL}}\$ の符号数を振れミルナー符号数と呼んだ ([M] も参照)。しかし、彼らは考察するぐらいで証明も具体例もほぼ与えていない。

そこで計算例を与える為、底空間 \$Y\$ に帰着したい (定理 4.3)。その皮切りとして下記の同型 (4) を説明する。まず \$V[t^{\pm 1}] := \mathbb{F}[t^{\pm 1}] \otimes_{\mathbb{F}} V\$ をおく。次式のテンソル積 \$\bar{\alpha} \otimes f_{\text{pre}}\$ による作用で、右 \$\mathbb{F}[\pi_1(Y)]\$-加群と思える。

$$(p \otimes v) \cdot g := (pt^{\alpha(g)}) \otimes (v \cdot f_{\text{pre}}(g)), \quad \text{for } g \in \pi_1(Y).$$

そこで、セル複体に付随するセル鎖群 \$C_*(Y, \partial Y; V[t^{\pm 1}])\$ をとる。そのリフトとして \$C_*(\tilde{Y}, \partial \tilde{Y}; V)\$ を適切に選んでおこう。すると \$\mathbb{F}[\pi_1(\tilde{Y})]\$-加群としての次の同一視を得る：

$$C_*(Y, \partial Y; V[t^{\pm 1}]) = V[t^{\pm 1}] \otimes_{f_{\text{pre}}} C_*(\tilde{Y}, \partial \tilde{Y}; V).$$

また、被覆変換 $\tau: \tilde{Y} \rightarrow \tilde{Y}$ を代表する元 $\gamma_0 \in \pi_L$ も固定しておこう. すると、次のような加群準同型を得る:

$$\Upsilon: C_*(Y, \partial Y; V[t^{\pm 1}]) \longrightarrow C_*(\tilde{Y}, \partial \tilde{Y}; V); \quad \sum_n t^n v_n \otimes c_n \longmapsto \sum_n (v_n \cdot f_{\text{pre}}(\gamma_0^{-n})) \otimes (\tau^n c_n), \quad (4)$$

ここで $\sum_n t^n v_n$ は $V[t^{\pm 1}]$ の元であり、 $v_n \in V$ とする. この Υ は複体同型である事が知られ、 γ_0 の取り方によらない ([KL, Theorem 2.1] 参照).

次にコホモロジーに目を転じたい. そこで、[KL, Hil] と同じく、標準的な次の仮定をおいて議論を進める.

仮定 (†). $\mathbb{F}$ は標数 0 とし、 $\mathbb{Z}$ の生成元を t と書く. 加えて、捩れ 1 次ホモロジー群 $H_1(Y, \partial Y; V[t^{\pm 1}]^n)$ は、 $\mathbb{F}$ 上有限次元とする. つまり、付随する捩れアレクサンダー多項式が非零とする: $\Delta_f \neq 0$.

すると、新しい加群 $M := V \otimes_{\mathbb{F}} (\mathbb{F}[t^{\pm 1}]/(\Delta_f))$ が定まり、テンソル表現 $\alpha \otimes f_{\text{pre}}$ により $\pi_1(Y)$ の局所系とみなせる. さらに、上の写像 Υ を単項イデアル (Δ_f) で割ることで、線型同型 $H_1(Y, \partial Y; M) \xrightarrow{\sim} H_1(\tilde{Y}, \partial \tilde{Y}; V)$ を得る. さらに、 $\mathbb{F}$ が標数 0 である事から、普遍係数定理により、(4) の双対的な写像が、次の同型を誘導する:

$$\Upsilon_{\Delta}^*: H^1(\tilde{Y}, \partial \tilde{Y}; V) \xrightarrow{\sim} H^1(Y, \partial Y; M).$$

加えて、上 ψ_{pre} を自然に $\psi: M \otimes M \rightarrow \mathbb{F}[t^{\pm 1}]/(\Delta_f)$ へと拡張する. すると相対カップ積 $\smile_{\psi}$ が定義できる. そこで、トレース写像を用いる事で、Kirk-Livingston の双線型形式 (3) が $\smile_{\psi}$ で書ける事を筆者は示した:

定理 4.3 ([N2]. [Neu] の局所係数版). 仮定 (†) に基づき、係数加群 $V = \mathbb{F}^n$ と $M = V \otimes_{\mathbb{F}} \mathbb{F}[t^{\pm 1}]/(\Delta_f)$ を上記のようにとる. この時、有限次元 $\mathbb{F}$ -空間上の双線型形式として次の等式が成立する:

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_{\text{KL}} \circ (\Upsilon_{\Delta}^*)^{\otimes 2} = \text{Tr} \circ \smile_{\psi}: H^1(Y, \partial Y; M)^{\otimes 2} \longrightarrow \mathbb{F}. \quad (5)$$

証明方針は論文 [Neu, 11 節] と同様に Milnor 双対定理 [M] の洞察である. 丁寧な議論を要するため略す.

参考文献

- [Bla] R. Blanchfield, *Intersection theory of manifolds with operators with applications to knot theory*, Ann. of Math. **65**: (1957) 340–356.
- [CG] A. J. Casson, C. McA. Gordon, *Cobordism of classical knots*, mimeographed notes (1975)
- [CJKLS] J. S. Carter, D. Jelsovsky, S. Kamada, L. Langford, M. Saito, *Quandle cohomology and state-sum invariants of knotted curves and surfaces*, Trans. Amer. Math. Soc. **355** (2003) 3947–3989.
- [Co] T. D. Cochran, *Noncommutative knot theory*, Algebr. Geom. Topol. **4** (2004), 347–398.
- [COT] T. D. Cochran, K. Orr, P. Teichner, *Knot concordance, whitney towers and L_2 -signatures*, Ann. of Math. **157** (2003) 433–519.
- [Gi] P. Gilmer, *On the slice genus of knots*, Invent. Math. **66** (1982), 191–197.
- [Hil] J. Hillman, *Algebraic invariants of links*, 2-nd ed. Series on Knots and everything. **32** World Scientific (2002).
- [IJO] A. Ishii, M. Iwakiri, Y. Jang, K. Oshiro, *A G -family of quandles and handlebody-knots*, Illinois J. Math. **57** (2013), 817–838.
- [KL] P. Kirk, C. Livingston, *Twisted Alexander invariants, Reidemeister torsion, and Casson-Gordon invariants*, Topology, **38** (1999), 635–661.
- [KLH] ———, C. Herald, *Metabelian representations, twisted Alexander polynomials, knot slicing, and mutation*, Math. Z. **265** (2010), 925–949.
- [NS] S. Naik, T. Stanford, *A move on diagrams that generators S -equivalence of knots*, J. Knot Theory Ramifications **12** (2003) 717–724.
- [Neu] W. Neumann, *Signature related invariants of manifolds-I. Monodromy and γ -invariants*, Topology **18** (1979), 147–172.
- [N1] T. Nosaka, *Quandle cocycles from invariant theory*, Advances in Mathematics, **245** (2013) 423–438.
- [N2] ———, *Relative cup products and twisted Blanchfield pairings of knots*, preprint (筆者の HP にて閲覧可).
- [M] J. W. Milnor, *Infinite cyclic coverings*, Conference on the Topology of Manifolds (Michigan State Univ., E. Lansing, Mich., 1967), Prindle, Weber & Schmidt, Boston, Mass., (1968) 115–133.
- [Tro1] H. F. Trotter, *On S -equivalence of Seifert matrices*, Invent. Math. **20** (1973), 173–207.
- [Tro2] ———, *Homology of group systems with applications to knot theory*, Ann. of Math. (2) **76** (1962) 464–498.