Idèlic class field theory for 3-manifolds

新甫　洋史 *

九州大学大学院数理学府

Abstract

類体論とは高木貞治を発端とする代数体のアーベル拡大体を記述する理論であり、後に C. Chevalley によってイデール群を用いて記述された。本稿では結び目と素数の類似に基づき、3 次元多様体におけるある無限成分の絡み目に対してイデール群を導入し、分岐アーベル被覆を記述する類体論を構成する。尚、本研究は九州大学の植木潤氏との共同研究である。

0　数論的位相幾何学

数論的位相幾何学は結び目と素数、3 次元多様体と代数体の整数環の類似をたどり、互いに問題を提起しあい、数論と幾何学を相互啓発的に発展させていく分野である。簡単に類似の辞書を述べよう。より詳しくは [M] を参照されたい。

代数体 k の整数環 $\mathrm{Spec}\mathcal{O}_k$	$\Longleftrightarrow$	連結で向き付け可能な閉 3 次元多様体 M
素イデアル $\mathfrak{p}$	$\Longleftrightarrow$	結び目 K
素イデアルの集合 $\{\,\mathfrak{p}_1,\dots,\mathfrak{p}_n\,\}$	$\Longleftrightarrow$	絡み目 $\{\,K_1,\dots,K_n\,\}$
代数体の不分岐拡大 L/k	$\Longleftrightarrow$	被覆 $h:N\to M$
$\{\mathfrak{p}_1,\dots,\mathfrak{p}_n\}$ 上の分岐拡大 L/k	$\Longleftrightarrow$	絡み目 $\{K_1,\dots,K_n\}$ 上の分岐被覆 $h:N\to M$
イデアル類群 H_k	$\Longleftrightarrow$	1 次ホモロジー群 $H_1(M)$
不分岐類体論 $H_k\cong \mathrm{Gal}(\tilde{k}^{\mathrm{ab}}/k)$ $\tilde{k}^{\mathrm{ab}}$: k の最大不分岐アーベル拡大	$\Longleftrightarrow$	Hurewicz 同型と被覆のガロア理論 $H_1(M;\mathbb{Z})\cong \mathrm{Gal}(M^{\mathrm{ab}}/M)$ M^{ab}: M の最大不分岐アーベル被覆

* e-mail: h-niibo@math.kyushu-u.ac.jp

ここでは上記の類似の辞書を用いて 3 次元トポロジーにおける局所類体論、イデール的大域類体論の類似物を構成する。

1　局所類体論

本節では数論における局所類体論を簡単に復習し、そのトポロジカルな類似物であるトーラスにおける局所類体論を構成する。$k_\mathfrak{p}$ を $\mathfrak{p}$ 進局所体、即ち $\mathbb{Q}_p$ の有限次拡大体とし、$v_\mathfrak{p} : k_\mathfrak{p} \to \mathbb{Z} \cup \{ \infty \}$ を $\mathfrak{p}$ 進付置、$\mathcal{O}_\mathfrak{p} = \{ a \in k_\mathfrak{p} \mid v_\mathfrak{p}(a) \geq 0 \}$ を付置環とする。この時以下の完全系列が成立する。

$$0 \to \mathcal{O}_\mathfrak{p}^\times \to k_\mathfrak{p}^\times \xrightarrow{v_\mathfrak{p}} \mathbb{Z} \to 0.$$

一方で、$k_\mathfrak{p}^{\mathrm{ab}}$ を $k_\mathfrak{p}$ の最大アーベル拡大体、$k_\mathfrak{p}^{\mathrm{ur}}$ を $k_\mathfrak{p}$ の最大不分岐拡大体とした時、ガロア理論より次の完全系列が成立する。

$$0 \to \mathrm{Gal}(k_\mathfrak{p}^{\mathrm{ab}}/k_\mathfrak{p}^{\mathrm{ur}}) \to \mathrm{Gal}(k_\mathfrak{p}^{\mathrm{ab}}/k_\mathfrak{p}) \to \mathrm{Gal}(k_\mathfrak{p}^{\mathrm{ur}}/k_\mathfrak{p}) \to 0.$$

さて、局所類体論の主定理は以下のようなものであった。

Theorem 1 (局所類体論 [KKS][Ne]). 局所相互写像と呼ばれる自然な準同型写像 $\rho_{k_\mathfrak{p}} : k_\mathfrak{p}^\times \to \mathrm{Gal}(k_\mathfrak{p}^{\mathrm{ab}}/k_\mathfrak{p})$ が存在し、次を満たす。

(1) 次は可換完全図式である。

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathcal{O}_\mathfrak{p}^\times \arrow[r] \arrow[d, "\rho_k|_{\mathcal{O}_\mathfrak{p}^\times}"] & k_\mathfrak{p}^\times \arrow[r, "v_\mathfrak{p}"] \arrow[d, "\rho_k"] & \mathbb{Z} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Gal}(k_\mathfrak{p}^{\mathrm{ab}}/k_\mathfrak{p}^{\mathrm{ur}}) \arrow[r] & \mathrm{Gal}(k_\mathfrak{p}^{\mathrm{ab}}/k_\mathfrak{p}) \arrow[r] & \mathrm{Gal}(k_\mathfrak{p}^{\mathrm{ur}}/k_\mathfrak{p}) \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

(2) 任意の有限次アーベル拡大体 $F_\mathfrak{P}/k_\mathfrak{p}$ について、$\rho_{k_\mathfrak{p}}$ は次の同型を誘導する。

$$k_\mathfrak{p}^\times/N(F_\mathfrak{P}^\times) \cong \mathrm{Gal}(F_\mathfrak{P}/k_\mathfrak{p}).$$

ここで $N : F_\mathfrak{P}^\times \to k_\mathfrak{p}^\times$ はノルム写像である。

次に局所類体論のトポロジカルな類似物を構成する。ここで以下の類似の辞書を用いる。

$\mathfrak{p}$ 進整数環 $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_\mathfrak{p})$	$\Longleftrightarrow$	K の管状近傍 V_K
$\mathfrak{p}$ 進体 $\mathrm{Spec}(k_\mathfrak{p}) = \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_\mathfrak{p}) \setminus \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_\mathfrak{p}/\mathfrak{p})$	$\Longleftrightarrow$	V_K の境界 $\partial V_K \cong V_K \setminus K$

この辞書により、トーラスにおける局所類体論の類似物を以下のように構成しよう。K を連結で向き付け可能な閉 3 次元多様体内の結び目とし、V_K を K の管状近傍、$T_K := \partial V_K$ をその境界とする。

m を T_K 内のメリディアン、l を T_K 内のロンジチュードとする。即ち、m は T_K 内の単純閉曲線であって、V_K 内の二次元円盤の境界となっているものとし、l は m と横断的に一点で交わり、$H_1(T_K)$ を生成する T_K 内の単純閉曲線とする。

この時、自然な包含写像 $T_K \hookrightarrow V_K$ は $v_K : H_1(T_K) \to H_1(V_K) = \mathbb{Z}[l]$ を誘導する。これを付値の類似と捉えることで以下の辞書を得る。

$k_\mathfrak{p}^\times$	$\Longleftrightarrow$	$H_1(T_K)$
$v_\mathfrak{p} : k_\mathfrak{p}^\times \to \mathbb{Z}$ $\mathfrak{p}$ 進付置	$\Longleftrightarrow$	$v_K : H_1(T_K) \to H_1(V_K) = \mathbb{Z}[l]$ “K 進付置”
$\mathrm{Ker}(v_\mathfrak{p}) = \mathcal{O}_\mathfrak{p}^\times$	$\Longleftrightarrow$	$\mathrm{Ker}(v_K) = \mathbb{Z}[m]$

次に T_K^{ab} を T_K の最大アーベル被覆とし、T_K^{ur} を V_K の普遍被覆から来る T_K の被覆とすると、被覆のガロア理論より次の完全系列が成立する。

$$0 \to \mathrm{Gal}(T_K^{\mathrm{ab}}/T_K^{\mathrm{ur}}) \to \mathrm{Gal}(T_K^{\mathrm{ab}}/T_K) \to \mathrm{Gal}(T_K^{\mathrm{ur}}/T_K) \to 0.$$

さて、以上の類似より次のトーラスにおける局所類体論を得る。

Theorem 2 (トーラス T_K の局所類体論 [N]). 局所相互写像と呼ばれる自然な準同型 $\rho_{T_K} : H_1(T_K) \to \mathrm{Gal}(T_K^{\mathrm{ab}}/T_K)$ が存在し、次を満たす。

(1) 以下が可換完全図式になる。

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathbb{Z}[m] \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & H_1(T_K) \arrow[r, "v_K"] \arrow[d, "\rho_K"] & \mathbb{Z}[l] \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Gal}(T_K^{\mathrm{ab}}/T_K^{\mathrm{ur}}) \arrow[r] & \mathrm{Gal}(T_K^{\mathrm{ab}}/T_K) \arrow[r] & \mathrm{Gal}(T_K^{\mathrm{ur}}/T_K) \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

(2) 任意の有限次アーベル被覆 $h : X \to T_K$ について、次の同型が成り立つ。

$$\rho_{X/T_K} : H_1(T_K)/h_*(H_1(X)) \cong \mathrm{Gal}(X/T_K).$$

2 イデール的大域類体論

本節では数論におけるイデール的大域類体論を復習し、その構成を真似て 3 次元トポロジーにおける大域類体論を構成する。k を代数体、即ち有理数体 $\mathbb{Q}$ の有限次拡大体とする。代数体 k のイデール群とは次のように定義される。

$$I_k := \left\{ (a_\mathfrak{p})_\mathfrak{p} \in \prod_{\mathfrak{p}\text{: prime}} k_\mathfrak{p}^\times \;\middle|\; \text{ほとんど全ての } \mathfrak{p} \text{ について } v_\mathfrak{p}(a_\mathfrak{p}) = 0 \right\}.$$

また、k の元がイデール群に対角的に入り、その像を主イデール群と呼ぶ。即ち、

$$P_k := \{\, (a_\mathfrak{p})_\mathfrak{p} \in I_k \mid a_\mathfrak{p} = a \in k^\times \,\}.$$

ここで $C_k := I_k/P_k$ を k のイデール類群と呼ぶ。イデール類群はイデアル類群の精密化であり、次の関係式が成立する。イデール群の部分群 $U_k := \{\, (a_\mathfrak{p})_\mathfrak{p} \in I_k \mid$ 全ての $\mathfrak{p}$ について $v_\mathfrak{p}(a_\mathfrak{p}) = 0 \,\}$ について、次の同型が成立する。

$$I_k/(P_k \cdot U_k) \cong H_k.$$

さて、イデール類群 C_k にはノルム位相と呼ばれる位相が定まる。ノルム位相は F/k を有限次アーベル拡大体とした時に定まるノルム写像 $N_{F/k} : C_F \to C_k$ を用いて定義される。即ち、F が k の有限次アーベル拡大を走る時、$N_{F/k}(C_F)$ が単位元 0 の基本近傍系となるような位相が定まりこれをノルム位相と呼ぶ。

以上の準備のもとに次のイデール的大域類体論の主定理が得られる。

Theorem 3 (イデール的大域類体論 [Ne][KKS])**.** (1) 大域相互写像と呼ばれる準同型写像 $\rho_k : C_k \to \mathrm{Gal}(k^{\mathrm{ab}}/k)$ が存在し、任意の有限次アーベル拡大 F/k について、ρ_k は次の同型を誘導する。

$$C_k/N_{F/k}(C_F) \cong \mathrm{Gal}(F/k).$$

(2) $F \mapsto N_{F/k}(C_F)$ という対応は有限次アーベル拡大体 F/k とイデール類群 C_k の指数有限開部分群との間の 1 対 1 対応である。また、アーベル拡大体 F/k が C_k の指数有限開部分群 N に対応している時、同型 $\mathrm{Gal}(F/k) \cong C_k/N$ が成立する。

さて、上記を踏まえて 3 次元多様体におけるイデール的大域類体論を構成しよう。以下 M を連結で向き付け可能な閉 3 次元多様体とする。M 内の絡み目 $\mathcal{K}$ が以下の条件を満たす時 very admissible と呼ぶ。

1. $\mathcal{K}$ の連結成分は高々加算無限である。
2. $\mathcal{K}$ は管状近傍を備える。
3. 任意の有限部分絡み目 $L \subset \mathcal{K}$ 上分岐する任意の有限アーベル被覆 $h : N \to M$ について $h^{-1}(\mathcal{K})$ が $H_1(N)$ を生成する。

任意の M について very admissible な絡み目 $\mathcal{K}$ が存在し、以下このような $\mathcal{K}$ を固定して考える。$\mathcal{K}$ は代数体 k の素イデアル全体の類似物であることに注意する。

さて、上記のような対 $(M, \mathcal{K})$ についてイデール群を次のように定義する。

$$I_{(M,\mathcal{K})} := \left\{ (a_K)_K \in \prod_{K \in \mathcal{K}} H_1(T_K) \;\middle|\; \text{ほとんど全ての } K \in \mathcal{K} \text{ について } v_K(a_K) = 0 \right\}.$$

次に主イデール群を定義したいのだが、その前に一つ準備をする。有限部分絡み目 $L \subset \mathcal{K}$ について $X_L := M \setminus L$ とし、$X_L^{\mathrm{ab}} \to X_L$ をその最大アーベル被覆とする。この時、$L \subset \mathcal{K}$ に包含写像による順序を考えることで次のような逆極限を考える。

$$\mathrm{Gal}(M, \mathcal{K})^{\mathrm{ab}} := \varprojlim_L \mathrm{Gal}(X_L^{\mathrm{ab}}/X_L).$$

この時、各結び目 $K \in \mathcal{K}$ について $\phi_K^L : H_1(T_K) \to H_1(X_L) \cong \mathrm{Gal}(X_L^{\mathrm{ab}}/X_L)$ が定まり、各 K について和を取ることにより $\phi_M^L := \sum_K \phi_K^L : I_{(M,\mathcal{K})} \to \mathrm{Gal}(X_L^{\mathrm{ab}}/X_L)$ が定まる。その後 L について逆極限を取ることにより $\phi_M = \varprojlim_L \phi_M^L : I_{(M,\mathcal{K})} \to \mathrm{Gal}(M, \mathcal{K})^{\mathrm{ab}}$ が定まる。

ここで、主イデール群を $P_{(M,\mathcal{K})} := \mathrm{Ker}(\phi_M)$ と定義し、イデール類群を $C_{(M,\mathcal{K})} := I_{(M,\mathcal{K})}/P_{(M,\mathcal{K})}$ と定義する。この時、数論におけるイデアル類群とイデール類群の関係同様に、1 次ホモロジー群とイデール類群の関係式が成立する。即ち、イデール群の部分群 $U_{(M,\mathcal{K})} := \{ (a_K)_K \in I_{(M,\mathcal{K})} \mid \text{全ての } K \in \mathcal{K} \text{ について } v_K(a_K) = 0 \}$ について、次の同型が成立する。

$$I_{(M,\mathcal{K})}/(P_{(M,\mathcal{K})} + U_{(M,\mathcal{K})}) \cong H_1(M).$$

また数論におけるイデール類群と同様に、ノルム位相を定める。即ち、$h : N \to M$ を有限部分絡み目 $L \subset \mathcal{K}$ 上分岐する有限次アーベル被覆とした時、被覆が誘導する準同型達によって $h_{N/M} : C_{(N,h^{-1}(\mathcal{K}))} \to C_{(M,\mathcal{K})}$ という準同型が定められ、これをノルム写像と呼ぶ。このノルム写像により、 $L \subset \mathcal{K}$ と L 上分岐する有限次アーベル被覆 $h : N \to M$ が走る時、$h_{N/M}(C_{(N,h^{-1}(\mathcal{K}))})$ を単位元 $0 \in C_{(M,\mathcal{K})}$ の基本近傍系とするような位相が定まり、これをノルム位相と呼ぶ。以上の準備のもとに次の定理が成り立つ。

Theorem 4 (3 次元多様体におけるイデール的大域類体論 [N][NU])**.** M を連結で向き付け可能な閉 3 次元多様体とし、$\mathcal{K}$ を very admissible な絡み目とする。

(1) 大域相互写像と呼ばれる準同型写像 $\rho_{(M,\mathcal{K})} : C_{(M,\mathcal{K})} \to \mathrm{Gal}(M,\mathcal{K})^{\mathrm{ab}}$ が存在し、$\mathcal{K}$ の有限部分絡み目上分岐する有限次アーベル被覆 $h : N \to M$ について、$\rho_{(M,\mathcal{K})}$ が次の同型を誘導する。

$$C_{(M,\mathcal{K})}/h_*(C_{(N,h^{-1}(\mathcal{K}))}) \cong \mathrm{Gal}(N/M).$$

(2) $(h : N \to M) \mapsto h_{N/M}(C_{(N,h^{-1}(\mathcal{K}))})$ という対応は、有限部分絡み目 $L \subset \mathcal{K}$ 上分岐する有限次アーベル被覆 $h : N \to M$ と $C_{(M,\mathcal{K})}$ の指数有限開部分群との間の 1 対 1 対応である。また、分岐被覆 $h : N \to M$ が C_M の指数有限開部分群 H に対応している時、同型 $\mathrm{Gal}(N/M) \cong C_{(M,\mathcal{K})}/H$ が成立する。

謝辞．最後に、数論的な内容に偏った話であるにも関わらず、結び目の数学という研究集会での講演を快諾して頂いた東京女子大学の大山淑之先生、並びに新國亮先生に感謝申し上げます。

References

[KKS] K. Kato, N. Kurokawa, T. Saito, Number Theory 2: Introduction to Class Field Theory, American Mathematical Soc., 2011.

[M] M. Morishita, Knots and primes. An introduction to arithmetic topology, Universitext. Springer, London, 2012

[Ne] J. Neukirch, Algebraic Number Theory, Grundlehren Der Mathematischen Wissenschaften, Volume 322. Springer-Verlag, 1999.

[N] H. Niibo, Idèlic class field theory for 3-manifolds, Kyushu J. Math., 68(2), 421-436, 2014.

[NU] H. Niibo, J. Ueki, Idèlic class field theory for 3-manifolds and very admissible links, preprint.