

On bind maps for braids

村尾 智 (筑波大学数理物質科学研究科)

概要

本稿では bind map という写像を導入し、その応用を与えた。組み紐の端点をいくつかの 3 価頂点を用いて綴じ合わせることで、3 価組み紐を構成することができる。この操作は組み紐全体から 3 価組み紐全体への写像を定義し、この写像を bind map と呼ぶ。この写像を用いることで任意のハンドル体絡み目は組み紐と bind map の情報から得られる整数列を用いて表すことができる。また、各組み紐に対してある綴じ方により得られる 3 価組み紐が他の綴じ方をもつ 3 価組み紐に変形可能かどうかを表すグラフが bind map を頂点集合として定まる。特に 3 本組み紐に対して、このようにして得られるグラフの形を完全に決定した。

1 Introduction

$I = [0, 1]$ とする。 **タングル** とは、 I^3 に埋め込まれたグラフであって、 ∂I^3 との交わりが 1 価頂点の和集合であり、それらは yz 平面に射影したときにどの 2 点も重ならないような、 I^3 の上面と底面における点列となっているものである。上 (底) 面における 1 価頂点のことを、**タングルの上 (底) 端点** と呼ぶ。2 つのタングルが与えられたとき、一方のタングルを上面と底面の各端点を保つ I^3 のイソトピーでもう一方のタングルに変形できるならば、これらは **同値** であるという。 **古典的タングル** とは、 $\text{Int } I^3$ 内に頂点を持たないタングルのことである。 **3 価タングル** とは、 $\text{Int } I^3$ 内の頂点がすべて 3 価であるタングルのことである。 **ハンドル体タングル** とは、 I^3 に埋め込まれたハンドル体の非交和であって、 ∂I^3 との交わりが円板の和集合であり、それらは yz 平面に射影したときにどの 2 つの円板も重ならないような、 I^3 の上面と底面における列となっているものである。上 (底) 面における円板のことを、**ハンドル体タングルの上 (底) 円板** と呼ぶ。ここでは、ハンドル体タングルの各 3 次元球体成分と ∂I^3 との交わりは 2 つ以上の円板を構成するものとする。2 つのハンドル体タングルが与えられたとき、一方のハンドル体タングルを上面と底面の各円板を保つ I^3 のイソトピーでもう一方のハンドル体タングルに変形できるならば、これらは **同値** であるという。ハンドル体タングル H がある 3 価タングル T の正則近傍、すなわち $H = N(T)$ であって、 H の各端円板が T の端点を 1 つずつ含んでいるとき、 H は T で表されるという。ここで、任意のハンドル体タングルはある 3 価タングルで表すことができる。

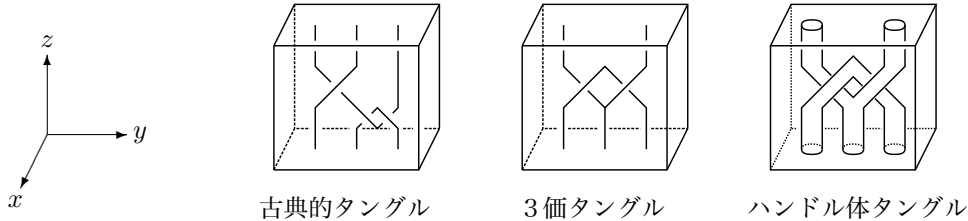


図 1

$\text{pr} : I^3 \rightarrow I$ を $\text{pr}(x, y, z) = z$ で定義される射影とする．**組み紐**とはタングル T であって，任意の点 $p \in T$ に対してある道 $\gamma : I \rightarrow T$ が存在して， $p \in \gamma(I)$ かつ $\text{pr} \circ \gamma = \text{id}_I$ が成り立つことである．**古典的組み紐**とは，古典的タングルであってかつ組み紐であるものである．一般に， l 個の上端点と底端点をもつ古典的組み紐全体の集合を B_l と書く．**3 価組み紐**とは，3 価タングルであってかつ組み紐であるものである．ここで， m 個の上端点と n 個の底端点をもつ 3 価組み紐全体の集合を TB_n^m と書くことにする．また， $TB_n := TB_n^n$ と定める．**ハンドル体組み紐**とはハンドル体タングル T であって，ある 3 価組み紐の正則近傍となっているものである．定義より，任意のハンドル体組み紐はある 3 価組み紐で表すことができる．

空間 3 価グラフの **IH-変形**とは，図 2 で表されるような空間グラフの局所的な置換のことである．この置換は S^3 内に埋め込まれた 3 次元球体で行われるものとする．

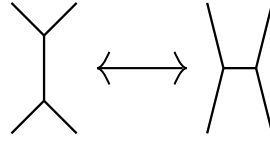


図 2 IH-変形

3 価組み紐 $T \in TB_s$ の**閉包** $\text{cl}(T)$ とは T の s 個の上端点と底端点を図 3 の左図のように s 本の平行な紐を用いて繋げ合わせることで得られる S^3 内の空間 3 価グラフのことである．

$\sigma_i, \sigma_i^{-1}, 1 \in TB_n, \check{\tau}_i \in TB_{n-1}^n, \hat{\tau}_i \in TB_{n-1}^n$ を図 4 で表される組み紐とする． $T_1 \in TB_m^l$ と $T_2 \in TB_n^m$ の積 $T_1 T_2 \in TB_n^l$ を， T_1 の底端点と T_2 の上端点を図 3 の右図のように貼り合わせることで得られる組み紐とする．任意の 3 価組み紐は $\sigma_i, \sigma_i^{-1}, \check{\tau}_i, \hat{\tau}_i$ の積で表すことができ，これを組み紐の**表示**という．

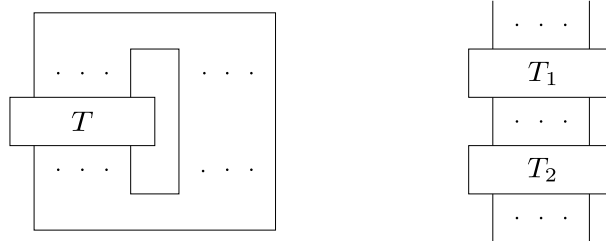


図 3 組み紐の閉包 (左) と積 (右)

2 つの 3 価組み紐 T_1, T_2 が次で表される組み紐の表示の局所的な変形の有限列で互いに移り合うとき， T_1 と T_2 は同値であるといい， $T_1 \cong T_2$ と書く．

$$\sigma_i x_j \leftrightarrow x_j \sigma_i, \check{\tau}_i x_{j-1} \leftrightarrow x_j \check{\tau}_i, \hat{\tau}_i x_j \leftrightarrow x_{j-1} \hat{\tau}_i \quad (i+1 < j, x_i = \sigma_i, \check{\tau}_i, \hat{\tau}_i), \quad (1)$$

$$\sigma_i \sigma_i^{-1} \leftrightarrow 1 \leftrightarrow \sigma_i^{-1} \sigma_i, x_i 1 \leftrightarrow 1 \leftrightarrow 1 x_i \quad (x_i = 1, \sigma_i, \check{\tau}_i, \hat{\tau}_i), \quad (2)$$

$$\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i \leftrightarrow \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}, \quad (3)$$

$$\sigma_i \check{\tau}_i \leftrightarrow \check{\tau}_i, \hat{\tau}_i \sigma_i \leftrightarrow \hat{\tau}_i \quad (4)$$

$$\sigma_i \sigma_{i+1} \check{\tau}_i \leftrightarrow \check{\tau}_{i+1} \sigma_i, \check{\tau}_i \sigma_i \leftrightarrow \sigma_{i+1} \sigma_i \check{\tau}_{i+1}, \hat{\tau}_i \sigma_{i+1} \sigma_i \leftrightarrow \sigma_i \hat{\tau}_{i+1}, \sigma_i \hat{\tau}_i \leftrightarrow \hat{\tau}_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}, \quad (5)$$

$$\check{\tau}_i \check{\tau}_i \leftrightarrow \check{\tau}_{i+1} \check{\tau}_i, \quad (6)$$

$$\hat{\tau}_i \hat{\tau}_i \leftrightarrow \hat{\tau}_i \hat{\tau}_{i+1}, \quad (7)$$

$$\hat{\tau}_i \check{\tau}_{i+1} \leftrightarrow \check{\tau}_i \hat{\tau}_i \leftrightarrow \hat{\tau}_{i+1} \check{\tau}_i \quad (8)$$

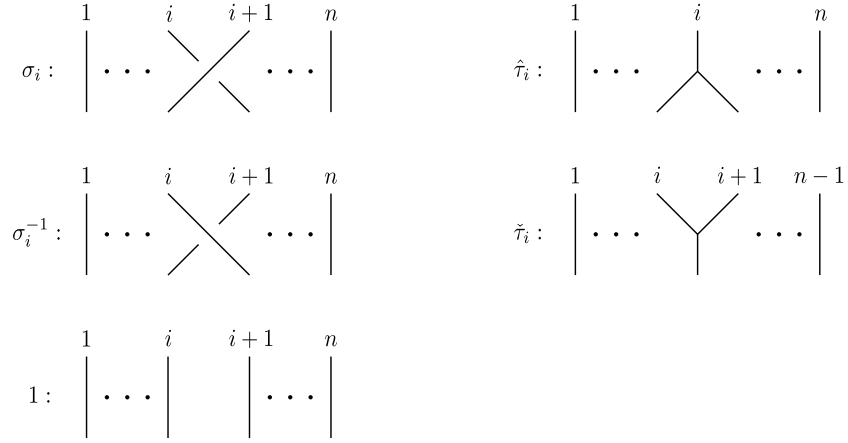


図4 生成元

ここで、3 価組み紐に対する Markov theorem を述べておく.

Theorem 1.1.

- 任意の3 価組み紐 $b_1, b_2 \in TB_n$ に対して、その閉包 $\text{cl}(b_1), \text{cl}(b_2)$ が互いに S^3 のイソトピーで移り合うことと、 b_1, b_2 の表示が (1)~(5) の変形及び、Markov move で移り合うことは同値である. [3]
- 任意の3 価組み紐 $b_1, b_2 \in TB_n$ に対して、その閉包 $\text{cl}(b_1), \text{cl}(b_2)$ で表されるハンドル体絡み目が互いに S^3 のイソトピーで移り合うことと、 b_1, b_2 の表示が (1)~(8) の変形及び、Markov move で移り合うことは同値である. [1]

2 ハンドル体結び目の表示

Definition 2.1. $\mathcal{P}_l := \{(p_1, \dots, p_k) \mid p_i, k \in \mathbb{Z}_{>0}, \sum_{i=1}^k p_i = l\}$ とする. すなわち $\mathcal{P}_l$ とは、 l の分割全体の集合である. このとき、 $\mathbf{m} = (m_1, m_2, \dots, m_s), \mathbf{n} = (n_1, n_2, \dots, n_t) \in \mathcal{P}_l$ に対して、 $(\mathbf{m}, \mathbf{n})$ -bind map $\text{bind}_{\mathbf{n}}^{\mathbf{m}} : B_l \rightarrow TB_t^s$ を $\text{bind}_{\mathbf{n}}^{\mathbf{m}}(b) := \hat{\tau}_s^{m_s-1} \dots \hat{\tau}_1^{m_1-1} b \check{\tau}_1^{n_1-1} \dots \check{\tau}_t^{n_t-1}$ で定義する. また $(\mathbf{m}, \mathbf{n})$ を、3 価組み紐 $\text{bind}_{\mathbf{n}}^{\mathbf{m}}(b)$ の型という. また、 $\text{bind}_{(\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \dots, \mathbf{n}_t)}^{(\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2, \dots, \mathbf{m}_s)}$ を $\text{bind}_{n_1, n_2, \dots, n_t}^{m_1, m_2, \dots, m_s}$ とも書く.

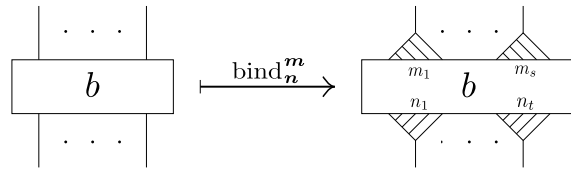


図5 bind map

Lemma 2.2. 任意の3 価組み紐 $T \in TB_t^s$ に対して、ある組み紐 $b \in B_l$ と正の整数列 $\mathbf{m} = (m_1, m_2, \dots, m_s), \mathbf{n} = (n_1, n_2, \dots, n_t) \in \mathcal{P}_l$ が存在して、 $\text{bind}_{\mathbf{n}}^{\mathbf{m}}(b) \cong T$ が成り立つ.

3次元球面 S^3 に埋め込まれた n 個のハンドル体の非交和のことを**ハンドル体絡み目**という。特に、 $n = 1$ のときは**ハンドル体結び目**という。ハンドル体絡み目 H がある空間3価グラフ K の正則近傍となっているとき、 H は K で表されるという。また任意のハンドル体絡み目はある空間3価グラフで表すことができる。また任意の空間グラフはある組み紐の閉包で表すことができるので、任意のハンドル体絡み目はある3価組み紐の閉包で表すことができる。[1, 4]

ハンドル体絡み目 H の s -**組み紐指数** $b_s(H)$, S -**組み紐指数** $b_S(H)$ を、

$$b_s(H) := \min_{\text{cl}(b)} \min_{\text{represents } H} \min_{t \in I} |b \cap \text{pr}_Z^{-1}(t)|, \quad b_S(H) := \min_{\text{cl}(b)} \min_{\text{represents } H} \max_{t \in I} |b \cap \text{pr}_Z^{-1}(t)|$$

で定義する。ここで、 $|b \cap \text{pr}_Z^{-1}(t)|$ は b と平面 $\text{pr}_Z^{-1}(t)$ の共通部分の点の個数を表す。

Proposition 2.3. 任意のハンドル体絡み目 H に対して、ある組み紐 $b \in B_l$ と正の整数の列 $\mathbf{m} = (m_1, m_2, \dots, m_s), \mathbf{n} = (n_1, n_2, \dots, n_s) \in \mathcal{P}_l$ が存在して、 H は $\text{cl}(\text{bind}_{\mathbf{n}}^{\mathbf{m}}(b))$ で表される。またこのとき、 $s = b_s(H)$ とできる。

Proposition 2.3 より、任意のハンドル体絡み目は組み紐と bind map の情報のみを用いて表すことができる。

Definition 2.4. $b = \sigma_{i_1}^{\epsilon_1} \cdots \sigma_{i_n}^{\epsilon_n} (\epsilon_i = \pm 1) \in B_l$, $\mathbf{m} = (m_1, \dots, m_s), \mathbf{n} = (n_1, \dots, n_s) \in \mathcal{P}_l$ に対して、 $\text{cl}(\text{bind}_{\mathbf{n}}^{\mathbf{m}}(b))$ で表されるハンドル体絡み目を $(\mathbf{m}; \mathbf{n}; b)$ または $(m_1, \dots, m_s; n_1, \dots, n_s; \epsilon_1 i_1, \dots, \epsilon_n i_n)$ と表し、これをハンドル体絡み目の **bind 表示** という。

Example 2.5. [2] で、6交点までの種数2の既約なハンドル体結び目の表が与えられた。それらに対応する bind 表示を表1で与える。

3 bind map を頂点とする無向グラフ

Definition 3.1. 任意の組み紐 $b \in B_l$ に対して、頂点集合 V_b を $V_b := \{\text{bind}_{\mathbf{n}}^{\mathbf{m}} \mid \mathbf{m}, \mathbf{n} \in \mathcal{P}_l\}$ で定義する。また、2つの頂点 $\text{bind}_{\mathbf{n}}^{\mathbf{m}}$ と $\text{bind}_{\mathbf{n}'}^{\mathbf{m}'}$ に対して $\text{bind}_{\mathbf{n}}^{\mathbf{m}}(b) \cong \text{bind}_{\mathbf{n}'}^{\mathbf{m}'}(b)$ が成り立つときに、この2つの頂点を辺でつなぐ。こうして得られる無向グラフを $G_b := (V_b, E_b)$ とする。ただし、 E_b は G_b の辺集合である。ここで、集合 $\mathcal{P}_l := \{(p_1, \dots, p_k) \mid p_i, k \in \mathbb{Z}_{>0}, \sum_{i=1}^k p_i = l\}$ の各元を辞書式順序 $(1 < 2 < \dots)$ によって一列に並べ、小さい方から順に x 軸, y 軸の正の方向に並べることで、各頂点 $\text{bind}_{\mathbf{n}}^{\mathbf{m}}$ は xy 平面上に格子点状に配置されているものとする。

Example 3.2. $b = \sigma_1 \sigma_2^{-1} \sigma_1 \sigma_2^{-1} \sigma_1 \sigma_2^{-1} \in B_3$ のとき、無向グラフ G_b は図6で与えられる。

Remark 3.3. 頂点集合 V_b において、2つの頂点が辺で結ばれることは同値関係となる。

Remark 3.4. 任意の組み紐 $b \in B_l$ と自然数列 $\mathbf{m} = (m_1, \dots, m_s), \mathbf{n} = (n_1, \dots, n_t) \in \mathcal{P}_l$ に対して、3価組み紐 $\text{bind}_{\mathbf{n}}^{\mathbf{m}}(b)$ において(8)の変形が可能であることと、ある組み紐 $b' \in B_l$ と正の整数列 $\mathbf{m}' = (m'_1, \dots, m'_s), \mathbf{n}' = (n'_1, \dots, n'_t) \in \mathcal{P}_l$ ($(\mathbf{m}, \mathbf{n}) \neq (\mathbf{m}', \mathbf{n}')$) が存在して、 $\text{bind}_{\mathbf{n}}^{\mathbf{m}}(b) \cong \text{bind}_{\mathbf{n}'}^{\mathbf{m}'}(b')$ を満たすことは必要十分である。

Lemma 3.5. $l \in \mathbb{Z}_{>0}$ を固定すると、任意の組み紐 $b \in B_l$ に対して無向グラフ G_b の外周部分是不変である。ただし $G(b)$ の外周部分とは、 $\text{bind}_{\mathbf{n}}^{1, \dots, 1}, \text{bind}_{1, \dots, 1}^{\mathbf{m}}, \text{bind}_{\mathbf{n}}^l, \text{bind}_l^{\mathbf{m}}$ で表される頂点及びこ

ハンドル体結び目	bind 表示
4_1	$(1, 2; 2, 1; 1, 1, 2, 2)$
5_1	$(1, 2; 2, 1; 1, 1, 1, 2, 2)$
5_2	$(1, 2; 2, 1; 1, -2, -2, 1, 1, 2)$
5_3	$(1, 2; 2, 1; 1, 1, -2, 1, -2)$
5_4	$(1, 1, 2; 1, 2, 1; -2, 1, 1, 1, -3, -3)$
6_1	$(1, 2; 2, 1; 1, 1, 1, 1, 2, 2)$
6_2	$(1, 2; 2, 1; 1, 1, -2, -2, 1, 1, 2)$
6_3	$(1, 2; 2, 1; 1, 1, 1, -2, 1, -2)$
6_4	$(1, 2; 2, 1; 1, -2, -2, -2, 1, 1, 2)$
6_5	$(1, 2; 2, 1; 1, 1, 1, 2, 2, 2)$
6_6	$(1, 2; 2, 1; 1, 1, 1, -2, -2, -2)$
6_7	$(1, 2; 2, 1; 1, 1, -2, 1, -2, -2)$
6_8	$(1, 2; 2, 1; 1, -2, 1, -2, 1, 1, 2)$
6_9	$(1, 1, 2; 2, 1, 1; -2, 3, -2, 1, -2, -3, 1, 2)$
6_{10}	$(1, 1, 2; 1, 2, 1; -2, 1, 1, 2, -3, -3, 2, 1)$
6_{11}	$(1, 1, 2; 1, 2, 1; -2, -1, -1, 3, 2, 2, 1, 3)$
6_{12}	$(1, 1, 2; 1, 1, 2; -2, 1, -3, -3, -3, -3, -2, 1)$
6_{13}	$(1, 1, 2; 1, 1, 2; -2, -1, -3, -3, -3, -3, -2, -1)$
6_{14}	$(1, 2, 1; 1, 2, 1; 1, 1, 1, 3, 3, 2, 2, 3)$
6_{15}	$(1, 2, 1; 1, 2, 1; 1, 1, 1, -3, -3, -2, -2, -3)$
6_{16}	$(1, 1, 1, 2; 1, 1, 2, 1; -3, -4, -2, 1, -2, 1, -4)$

表 1 bind 表示

れらを端点にもつ辺のことである.

Lemma 3.5 より, 任意の組み紐 $b \in B_l$ に対して外周部分以外の部分グラフを決定すれば, 無向グラフ G_b が決定できる. この部分グラフを G_b° と表すことにする.

以上の準備の下で, 組み紐 $b \in B_3$ に対して G_b° の取りうる形を決定する. まず Remark 3.3 から, 同値関係の推移律より G_b° の形は図 7 の 15 通りに限られる. さらに, 次の定理が成り立つ.

Theorem 3.6. 任意の組み紐 $b \in B_3$ に対して, 無向グラフ G_b° の取りうる形は $G_0, G_{1,1}, G_{1,2}, G_{1,3}, G_{1,4}, G_{1,5}, G_{1,6}, G_{3,1}, G_{3,2}, G_{3,3}, G_{3,4}$ の 11 通りである.

Proof. 任意の組み紐 $b \in B_3$ に対し, $G_b^\circ \neq G_{2,1}$ を示す. $G_b^\circ = G_{2,1}$ であったとする (図 8). このとき, $\text{bind}_{1,2}^{1,2}(b) \cong \text{bind}_{2,1}^{1,2}(b)$ かつ $\text{bind}_{1,2}^{2,1}(b) \cong \text{bind}_{2,1}^{2,1}(b)$. ここで, 組み紐 b の上端点と底端点のつながり方に着目する. b において左上の端点から左下の端点へ紐が繋がっていたとすると, $\text{bind}_{1,2}^{1,2}(b)$ の連結成分数は 2 であるが, $\text{bind}_{2,1}^{1,2}(b)$ の連結成分数は 1 となり, これらが同値であることに矛盾する. 同様に, b において左上の端点から右下の端点へ紐が繋がっていたとすると, $\text{bind}_{1,2}^{1,2}(b)$ の連結成分数は 1 であるが, $\text{bind}_{2,1}^{1,2}(b)$ の連結成分数は 2 となり, これらが同値であることに矛盾する. したがって b の左上の端点から繋がる紐は, 下の中央の端点に繋がっている必要がある. 一方, b に

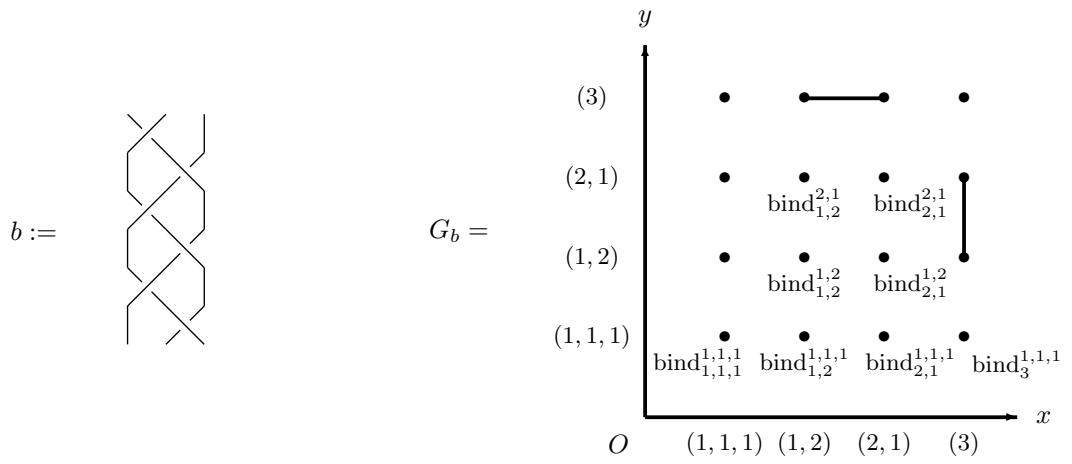


図 6

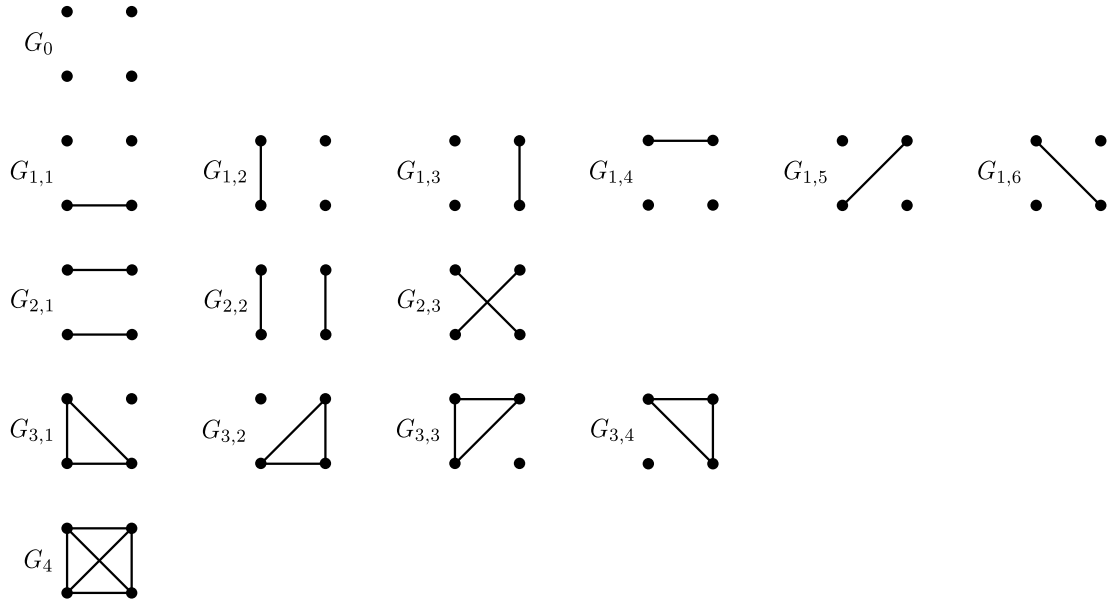


図 7

において右上の端点から左下の端点へ紐が繋がっていたとすると, $\text{bind}_{1,2}^{2,1}(b)$ の連結成分数は 2 であるが, $\text{bind}_{2,1}^{2,1}(b)$ の連結成分数は 1 となり, これらが同値であることに矛盾する. 同様に, b において右上の端点から右下の端点へ紐が繋がっていたとすると, $\text{bind}_{1,2}^{2,1}(b)$ の連結成分数は 1 であるが, $\text{bind}_{2,1}^{2,1}(b)$ の連結成分数は 2 となり, これらが同値であることに矛盾する. したがって b の右上の端点から繋がる紐は, 下の中央の端点に繋がっている必要があるが, これは上の結果に矛盾する. 同様に, $G_b^\circ \neq G_{2,2}, G_{2,3}, G_4$ も示される. $\square$

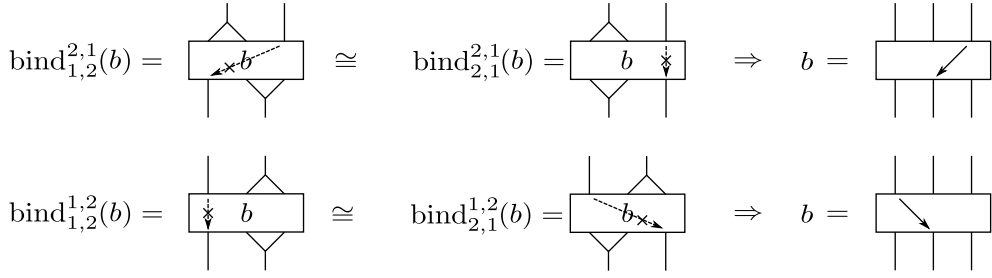


図 8

4 bind map を頂点とする有向グラフ

Definition 4.1. 任意の組み紐 $b \in B_l$ に対して, 頂点集合 $\vec{V}_b$ を $\vec{V}_b := \{\text{bind}_n^m \mid m, n \in \mathcal{P}_l\}$ で定義する. またある組み紐 $b' \in B_l$ が存在して $\text{bind}_n^m(b) = \text{bind}_n^{m'}(b')$ が成り立つときに, 頂点 bind_n^m から頂点 $\text{bind}_n^{m'}$ への有向辺で 2 頂点をつなぐ. こうして得られる有向グラフを $\vec{G}_b := (\vec{V}_b, \vec{E}_b)$ とする. ただし, $\vec{E}_b$ は $\vec{G}_b$ の辺集合である. ここで, 集合 $\mathcal{P}_l := \{(p_1, \dots, p_k) \mid p_i, k \in \mathbb{Z}_{>0}, \sum_{i=1}^k p_i = l\}$ の各元を辞書式順序 ($1 < 2 < \dots$) によって一列に並べ, 小さい方から順に x 軸, y 軸の正の方向に並べることで, 各頂点 bind_n^m は xy 平面上に格子点状に配置されているものとする.

Example 4.2. $b = \sigma_1\sigma_1\sigma_1\sigma_2\sigma_1\sigma_1 \in B_3$ のとき, 有向グラフ $\vec{G}_b$ は図 9 で与えられる.

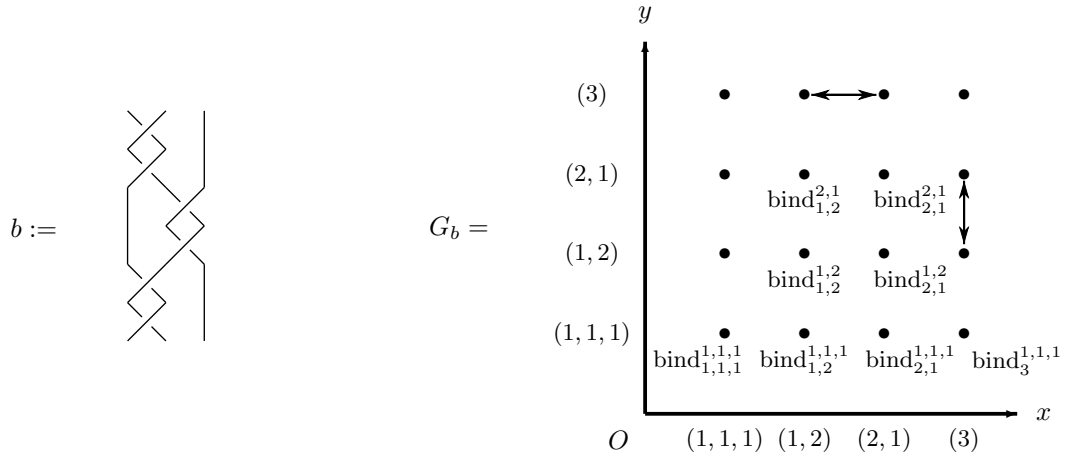


図 9

Lemma 4.3. $l \in \mathbb{Z}_{>0}$ を固定すると, 任意の組み紐 $b \in B_l$ に対して有向グラフ $\vec{G}_b$ の外周部分是不変である. ただし $\vec{G}_b$ の外周部分とは, $\text{bind}_n^{1, \dots, 1}, \text{bind}_{1, \dots, 1}^m, \text{bind}_n^l, \text{bind}_l^m$ で表される頂点及びこれらを端点にもつ辺のことである.

Lemma 4.3 より, 任意の組み紐 $b \in B_l$ に対して外周部分以外の部分グラフを決定すれば, 有向グラフ $\vec{G}_b$ が決定できる. この部分グラフを $\vec{G}_b^\circ$ と表すことにする.

Lemma 4.4. 任意の組み紐 $b \in B_3$ に対して, $\vec{G}_b^\circ$ における任意の頂点の出次数は 0 または 3 である.

Corollary 4.5. 任意の組み紐 $b \in B_3$ と $\vec{G}_b^\circ$ における頂点 bind_n^m に対して, 空間 3 価グラフ $\text{cl}(\text{bind}_n^m(b))$ の表すハンドル体絡み目が自明なハンドル体結び目でなければ, 頂点 bind_n^m における出次数は 0 である.

以上の準備の下で, 任意の組み紐 $b \in B_3$ に対して $\vec{G}_b^\circ$ の取りうる形を決定する. まず Lemma 3.5 より, $\vec{G}_b^\circ$ の形は図 10 の 16 通りに限られる. さらに, 次の定理が成り立つ.

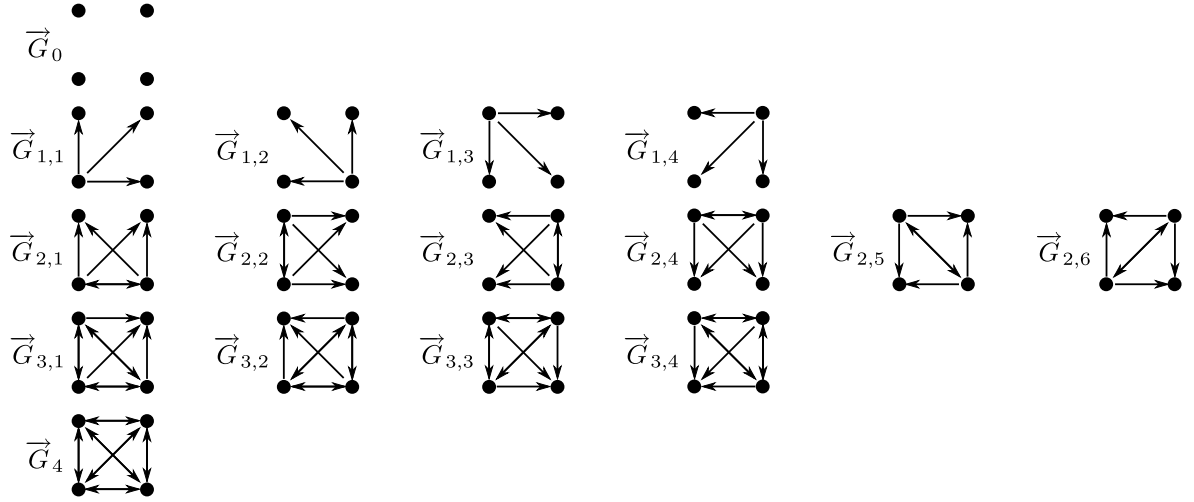


図 10

Theorem 4.6. 任意の組み紐 $b \in B_3$ に対して, 有向グラフ $\vec{G}_b^\circ$ の取りうる形は $\vec{G}_0, \vec{G}_{1,1}, \vec{G}_{1,2}, \vec{G}_{1,3}, \vec{G}_{1,4}, \vec{G}_{2,1}, \vec{G}_{2,2}, \vec{G}_{2,3}, \vec{G}_{2,4}, \vec{G}_{2,5}, \vec{G}_{2,6}, \vec{G}_{3,1}, \vec{G}_{3,2}, \vec{G}_{3,3}, \vec{G}_{3,4}$ の 15 通りである.

参考文献

- [1] A. Ishii, *The Markov theorem for spatial graphs and handlebody-knots with Y-oriented IH-labeled spatial trivalent graphs*, preprint.
- [2] A. Ishii, K. Kishimoto, H. Moriuchi and M. Suzuki, *A table of genus two handlebody-knots up to six crossings*, to appear in J. Knot Theory Ramifications.
- [3] S. Kamada and V. Lebed, *Alexander and Markov theorems for graph-braids*, in preparation.
- [4] K. Kanno and K. Taniyama, *Braid presentation of spatial graphs*, Tokyo J. Math. **33** (2010), 509–522.