

絡み目の曲面族への配置について

松崎 尚作 (早稲田大学大学院教育学研究科)

概 要

$\mathbb{R}^3$ に埋め込まれた連結 2-多様体から成る族を曲面族と呼ぶ. 曲面族 $\mathcal{P} = \{P_i\}_{i \in \Lambda}$ が与えられた時, $\mathbb{R}^3$ の絡み目 L が $\mathcal{P}$ に配置可能であるとは, 向きを保つ $\mathbb{R}^3$ の自己同相写像 f が存在して, 絡み目 $f(L)$ の任意の成分が $\mathcal{P}$ に属するある 2-多様体に含まれることを言う. 本講演では, 任意の絡み目は, ある条件を満たす曲面族に配置可能である事などについて述べる.

本稿を通じて, 絡み目といえば, $\mathbb{R}^3$ に局所平坦に埋め込まれた有限個の S^1 を指すこととする.

1. はじめに

以前, 各成分が自明であるようなどんな絡み目も, $\mathbb{R}^3$ 上の全同位で上手に変形することで, 変形後の絡み目の各成分が, 何らかの平面に含まれるように出来ることを示した [2]. ここで, 平面とは, $\mathbb{R}^3$ の中で, $\{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ と合同なものを指している. 各成分が自明という強い条件の絡み目に対して得られていた結果を, 一般の絡み目に対して拡張することが出来たので, それを紹介する.

本稿を通じて PL カテゴリーで考える, また, 絡み目は $\mathbb{R}^3$ にあるものとする.

定義. $\mathcal{F} = \{F_1, F_2, F_3, \dots, F_n\}$ を曲面族, L を絡み目とすると, L が $\mathcal{F}$ に配置可能であるとは, 以下が満たされるときをいう.

向きを保つ同相写像 $h: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ が存在して, 絡み目 $h(L)$ の任意の成分 C に対して, $C \subset F_i$ なる $F_i \in \mathcal{F}$ が存在する.

(同一の曲面に複数の絡み目の成分が含まれていてもよいことに注意しておく.)

定義. 曲面族 $\mathcal{F} = \{F_1, F_2, \dots, F_n\}$ が平面族であるとは, 以下が満たされるときをいう.

1. 各 F_i が, $\mathbb{R}^2 \times \{0\} \subset \mathbb{R}^3$ と合同であり,
2. $i \neq j$ なる i, j に対し, $F_i \cap F_j$ が, $\mathbb{R}^1 \times \{0\} \times \{0\} \subset \mathbb{R}^3$ と合同である.

なお, 各 i, j に対し, $F_i \cap F_j$ を $\mathcal{F}$ の交差直線とよんでおく.

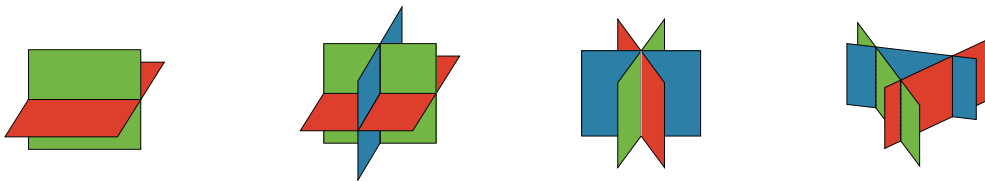


図 1: 平面族の例.

また, 平面族 $\mathcal{F} = \{F_1, F_2, \dots, F_n\}$ が与えられたとき, 以下の操作で得られる曲面族を準平面族という.

Step1. 各平面に, “局所的に” ボールを有限個つける. (各ボールは $\mathcal{F}$ に属するちょうど一つの平面とだけ交わり, その共通部分はディスクである. 各ボールは互いに交わらない. また, 各ボールは $\mathcal{F}$ の交差直線と交わらない.)

Step2. 各ボールの中で, 平面に標準的な連結閉曲面を1つ連結和する.

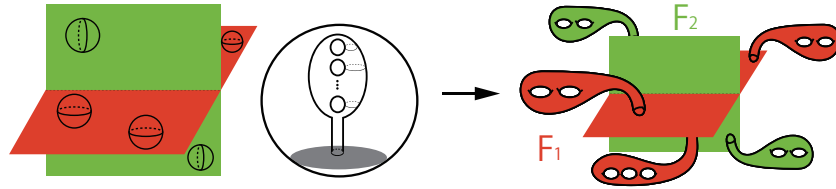


図 2: 2-準平面族の例.

以下, n 枚の曲面から成る曲面族を, 単に n -曲面族と書く. 参考に, 以前得られた, 平面族に配置可能な絡み目の特徴付けに関する結果を述べておく.

定理 1[M]. L を絡み目, n を自然数とすると, 以下は同値である.

1. 絡み目, もしくは空集合 $L_1, L_2, \dots, L_n$ が存在して, $L = L_1 \cup L_2 \cup \dots \cup L_n$ (直和) と表され, 各 L_i は, 空集合でなければ自明絡み目となる.
2. L は, 任意の, n -平面族に配置可能である.

系. 各成分が自明である絡み目 L は, 任意の $\mu(L)$ -平面族に配置可能である.

ただし, $\mu(L)$ は L の成分数とする. より正確には, 各成分が, それぞれ異なる平面に含まれるように配置できる.

(例) 任意の 3 成分絡み目は, 例えば, 以下の様な平面族に配置可能である. 括弧内は $\mathbb{R}^3$ を一点コンパクト化して S^3 にしたときの曲面族の様子を模式的に書いたものである.

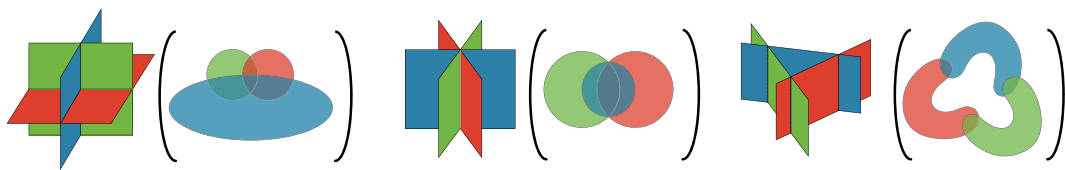


図 3: 3-平面族の例 (他にもある).

系. ブルン性を持つ絡み目は, その成分数によらず, 2-平面族に配置可能である.

そこで, 以下の様な問いを考える.

曲面族が与えられたとき, それに配置可能な絡み目を特徴付けよ. あるいは, 絡み目が与えられたとき, それを配置することのできる曲面族を特徴付けよ.

定理 1 は, この問いに関する部分的な解答を与えている. 以下のセクションでは, これを拡張した結果を紹介する.

2. 主定理

本セクションでは、定理1. より一般の曲面族(準平面族)に拡張した結果について述べる.

定義. 準平面族 $\{F_1, F_2, F_3, \dots, F_n\}$ が $(g_1, g_2, g_3, \dots, g_n)$ 型であるとは、各 i に対して、 $g(F_i) = g_i$ を満たすときをいう.

(例) 以下の準平面族 $\{F_1, F_2\}$ は、どちらも $(7, 4)$ 型である.

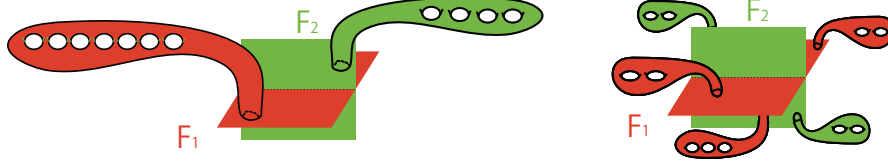


図 4: $(7, 4)$ 型の 2-準平面族 $\{F_1, F_2\}$.

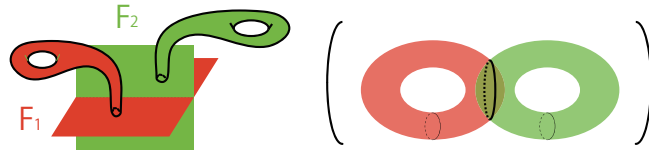
定義. L を絡み目とすると、 $h(L) := \min\{g(F) \mid F \text{ は自明な連結閉曲面, } L \subset F\}$ を L の **h-種数** とよぶ [3].

定理 2[M]. L を絡み目、 $g_1, g_2, \dots, g_n$ を非負整数とすると、以下は同値である.

1. 絡み目または空集合 $L_1, L_2, \dots, L_n$ が存在して、 $L = L_1 \cup L_2 \cup \dots \cup L_n$ (直和) と表され、各 i に対して $h(L_i) \leq g_i$ を満たす.
2. L は、任意の $(g_1, g_2, \dots, g_n)$ 型の準平面族に配置可能.

系. 任意の絡み目 $L = K_1 \cup K_2 \cup \dots \cup K_n$ (各 K_i は結び目) は、任意の $(h(K_1), h(K_2), \dots, h(K_n))$ 型準平面族に配置可能である.

(例) トーラス結び目 2 つから成る任意の 2-成分絡み目は、以下の様な準平面族 $\{F_1, F_2\}$ に配置可能である.



この定理の証明に、以下の補題を用いるので紹介しておく.

補題. (Lee-Jin, 2001, [1]) $\mathcal{L} = \mathcal{L}_A \cup \mathcal{L}_B$ を絡み目型、 D を $\mathcal{L}$ の図式のひとつ、 D_A を $\mathcal{L}_A$ の図式のひとつとすると、 $\mathcal{L}$ の図式 D' が存在して、 $D'(\mathcal{L}_B) = D(\mathcal{L}_B)$ かつ、 $D'(\mathcal{L}_A)$ と D_A は、 $\mathbb{R}^2$ 上の全同位で移りあう. (ここで絡み目の図式とは、絡み目の $\mathbb{R}^2$ 上の図式とする. また、 $\mathcal{L}$ の図式 D と $\mathcal{L}$ の部分絡み目型 $\mathcal{L}'$ に対し、 D の $\mathcal{L}'$ に対応する部分だけに注目した図式を $D(\mathcal{L}')$ と表記する.)

3. 忠実な配置可能性

定義. $\mathcal{F} = \{F_1, F_2, \dots, F_n\}$ を曲面族, $L = K_1 \cup K_2 \cup \dots \cup K_n$ を絡み目 (K_i は結び目) とするとき, L が $\mathcal{F}$ に**忠実に配置可能**であるとは以下を満たすときをいう.

向きを保つ同相写像 $h: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ が存在して, 各 i に対して, $h(K_i) \subset F_i$.

忠実とは限らない曲面族への配置の場合と同様に, 以下の様な問題を考えることができる.

曲面族が与えられた時, それに忠実に配置可能な絡み目を特徴付けよ.

また, 絡み目が与えられた時, それを忠実に配置できるような曲面族を特徴付けよ.

定理2を言い換えることで, 以下の命題が得られる.

命題. $\mathcal{F} = \{F_1, F_2, \dots, F_n\}$ を平面族とし, L を各成分が自明な n -成分絡み目とすると, L は $\mathcal{F}$ に忠実に配置可能である.

また, 例えば以下のような結果も得られている.

命題. $\mathcal{F} = \{F_1, F_2, \dots, F_n\}$ を以下の様な曲面族とし, L をブルン性を持つ n -成分絡み目とすると, L は $\mathcal{F}$ に忠実に配置可能である.

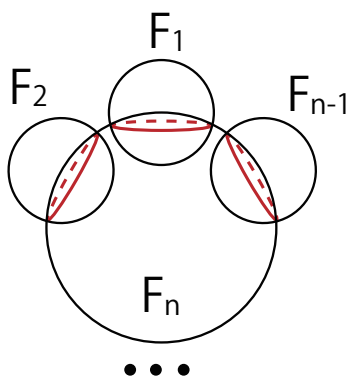


図 5: F_n と, 各 $F_i (i \neq n)$ との共通部分はループであり, n でない i, j に対し $F_i \cap F_j = \emptyset$ となる, スフィアからなる曲面族 $\mathcal{F} = \{F_1, F_2, \dots, F_n\}$.

参考文献

- [1] Lee, J. H. and Jin, G. T., *Link diagrams realizing prescribed subdiagram partitions*, Kobe journal of mathematics, 18, (2001), 199–202.
- [2] Matsuzaki, S. *Plane number of links*, preprint.
- [3] Morimoto, K., *Tunnel number, 1-bridge genus and h-genus of knots.*, Topology and its applications, Volumes 146-147, January 2002, 149-158.