

Uniform hyperbolicity for curve graphs of nonorientable surfaces

久野恵理香 (大阪大学)*

本稿では, $N = N_{g,n}$ を種数 $g \geq 1$, 境界成分 $n \geq 0$ 個の向き付け不可能曲面とする.

1. 導入

$\mathcal{C}(N)$ を N の curve graph とする. 2007 年に Bestvina-Fujiwara[2] が, 2013 年に Masur-Schleimer[6] が $\mathcal{C}(N)$ は (Gromov の意味で) 双曲的であるということを示したが, その一様性は分かっておらず, その具体的な双曲性定数も与えられていなかった. 一方, 2013 年に Aougab[1], Bowditch[3], Clay-Rafi-Schleimer[4], そして Hensel-Przytycki-Webb[5] が独立に向き付け可能曲面の curve graph は曲面の種数と境界成分の個数によらない定数で双曲的である (これを一様双曲的であるという) ことを示した. そしてこの Hensel-Przytycki-Webb[5] による議論を向き付け不可能曲面の場合に適用し, 次の結果を得た:

定理 1.1. $\mathcal{C}(N)$ は連結のとき, 17-双曲的になる.

ここで $\mathcal{C}(N)$ が連結となるのは, $g = 1, 2$ かつ $g + n \geq 5$ のときと, $g \geq 3$ のときである. 定理 1.1 より, Hensel-Przytycki-Webb[5] が選んだ双曲性定数は向き付け可能, 不可能にかかわらずどんなコンパクトで連結な曲面から構成した連結な curve graph に対しても選べるということが言える. 定理 1.1 で重要な点は, 双曲性定数が普遍定数として取れるという点である. 本稿は, 特にこの Hensel-Przytycki-Webb[5] による議論を向き付け不可能曲面の場合に適用するとき注意しなければならない点に重点を置く.

2. 準備

定義 2.1. 種数 $g \geq 1$, 境界成分 $n \geq 0$ 個の向き付け不可能曲面 $N = N_{g,n}$ とは, 射影平面 g 個の連結和から n 個の開円板を取り除いたものである. これは, $g + n$ 個の境界成分を持った球面に g 個のメビウスの帯を境界成分に沿って張り合わせた曲面 (図 1 の左) に同相である. そしてこれを, n 個穴あき球面上に g 個の crosscap と呼ばれるものを書いた模式図 (図 1 の右) で表す. 各 crosscap の円周には対蹠点の同一視が入っている.

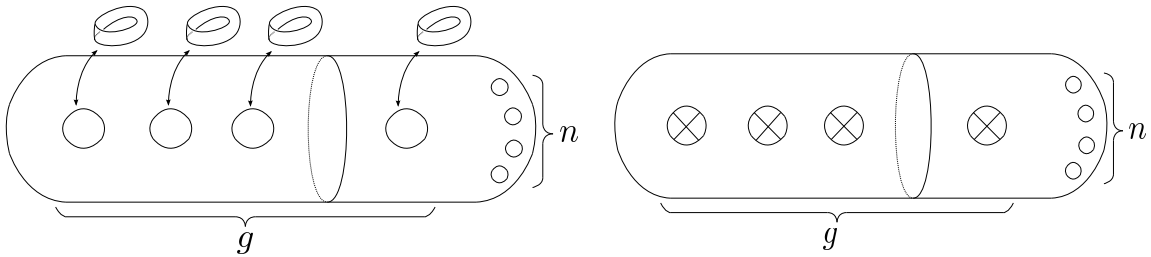


図 1: 向き付け不可能曲面 $N_{g,n}$.

* 〒560-0043 大阪府豊中市待兼山町 1-1 大阪大学大学院理学研究科 数学専攻
e-mail: e-kuno@cr.math.sci.osaka-u.ac.jp

定義 2.2. N 上の単純弧または単純閉曲線が, その境界は N の境界に, その内部は N の内部に埋め込まれているとき, それらは N に固有に埋め込まれているという. N に固有に埋め込まれている単純弧が本質的であるとは, その単純弧が N の境界成分の一部にホモトピックでないことである. N に固有に埋め込まれている単純閉曲線が本質的であるとは, その単純閉曲線が N 上で円板やメビウスの帯の境界になっておらず, 更に N の境界成分にホモトピックでないことである.

定義 2.3. N の **arc curve graph** $\mathcal{AC}(N)$ とは, N に固有に埋め込まれた本質的な単純弧 (以下, 単純弧) と本質的な単純閉曲線 (以下, 単純閉曲線) のホモトピー類を頂点とし, 2つの頂点はそれらに対応する単純弧または単純閉曲線のホモトピー類の中で交わらない代表元の組が選べるときに辺で結ばれる, と定めることによってできるグラフのことである. また, N の **arc graph** $\mathcal{A}(N)$ とは N 上の単純弧のホモトピー類のみによってできる $\mathcal{AC}(N)$ の部分グラフのことで, N の **curve graph** $\mathcal{C}(N)$ とは N 上の単純閉曲線のホモトピー類のみによってできる $\mathcal{AC}(N)$ の部分グラフのことである. それぞれのグラフの各辺の長さを 1 として, 2つの頂点の距離は 2つの頂点を結ぶ辺の最小列 (測地線) の長さで定め, $\mathcal{AC}(N)$, $\mathcal{A}(N)$, $\mathcal{C}(N)$ を測地空間とみなす. それぞれの距離を, $d_{\mathcal{AC}}(\cdot, \cdot)$, $d_{\mathcal{A}}(\cdot, \cdot)$, $d_{\mathcal{C}}(\cdot, \cdot)$ とかく.

定義 2.4. graph が (Gromov の意味で) 双曲的であるとは, ある定数 $k \geq 0$ が存在して, graph 内の任意の測地三角形 $T = abd$ (a, b, d は graph の頂点) に対して, ある graph の頂点 p が存在して, T の 3つの各辺と p の距離がそれぞれ高々 k になることである. (図 2 を見よ.) この k のことを双曲性定数といい, 頂点 p のことを測地三角形 T の k -中心という. 双曲性定数が $k \geq 0$ で選べるとき, graph は k -双曲的であるという. 但し, 測地空間内の測地三角形とは, 3つの頂点を結ぶ三角形の 3辺が測地空間内の測地線になっている三角形のことである.

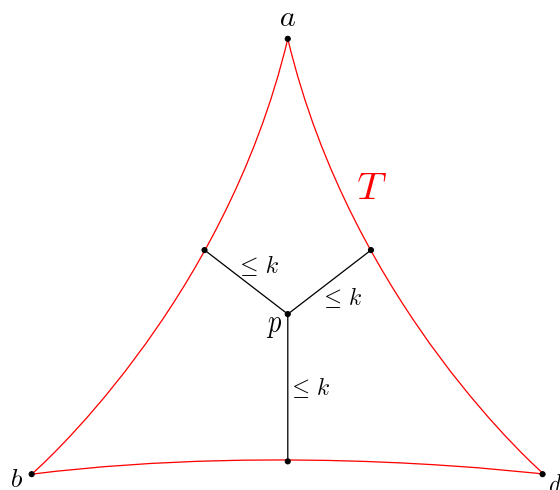


図 2: Gromov 双曲的.

3. 向き付け可能曲面の場合との違い

以下, a と b を N 上の単純弧で minimal position にあるものとする.
単純弧 a の部分弧で端点 α と α' を持つものを $\overline{\alpha\alpha'}_a$ によって表す.

定義 3.1. α と β をそれぞれ a と b の端点の一方とする. $\pi \in a \cap b$ を1つ選び, $a' = \overline{\alpha\pi}_a$, $b' = \overline{\beta\pi}_b$ とする. $a' \cup b'$ が N に埋め込まれた単純弧になるとき, $a' \cup b'$ のことを a^α, b^β と π によって定められる **unicorn arc** という. (図 3 は unicorn arc の1つの例.)

向き付け可能曲面の場合 ([5]) と同様に, *unicorn path* という $\mathcal{A}(N)$ 上の1つの path を定めることができる.

定義 3.2. $a' \cup b'$ と $a'' \cup b''$ ($a', a'' \subset a, b', b'' \subset b$) を a^α と b^β から得られる2つの unicorn arc とする. $a' \cup b' \leq a'' \cup b'' \Leftrightarrow a'' \subseteq a'$ かつ $b' \subseteq b''$ と順序を定める. $(c_1, c_2, \dots, c_{n-1})$ を a^α と b^β から得られる順序づけられた unicorn arc の集合とする. このとき $\mathcal{P}(a^\alpha, b^\beta) := (a = c_0, c_1, \dots, c_{n-1}, c_n = b)$ を a^α と b^β の間の **unicorn path** という.

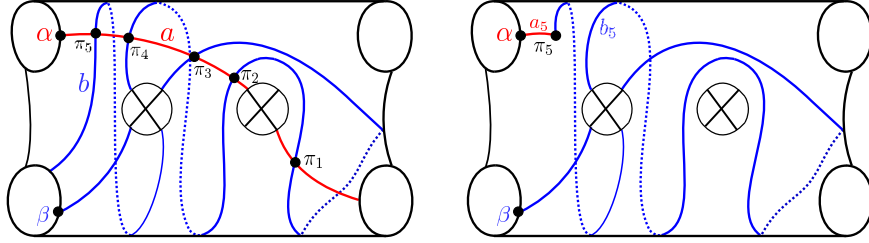


図 3: a^α と b^β と π_5 によって定められる unicorn arc.

向き付け可能曲面の場合 ([5]) と同様に次の命題が成り立つ.

命題 3.3. a, b を $\mathcal{A}(N)$ の2つの頂点とする. 記号を乱用してこの a, b を N 上の単純弧で minimal position にあるものとする. このとき, 任意の unicorn path $\mathcal{P}(a^\alpha, b^\beta)$ は a と b を結ぶ $\mathcal{A}(N)$ 内の path になる. 但し α, β はそれぞれ a, b の端点の一方である.

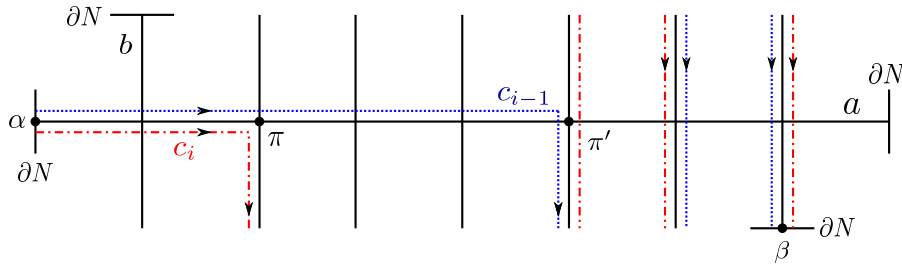


図 4: c_i を c_{i-1} と交わらないようにホモトピーによって変形した1つの例.

向き付け不可能曲面の場合に注意しなければならないのは, unicorn path 内の隣り合う2つの unicorn arc を交わらないようにするためのホモトピー変形の仕方であるが次のように工夫すればよい. $c_i = \overline{\alpha\pi}_a \cup \overline{\beta\pi}_b$ ($2 \leq i \leq n-1$) とする. π' を unicorn arc c_{i-1} を定める $a \cap b$ の点とする. c_i とホモトピックな単純弧で c_{i-1} と横断的に交わらないものが存在する: c_i が π で曲がるときに c_{i-1} と交わらない $\overline{\alpha\pi}_a$ の正則近傍の境界成分の方向に $\overline{\alpha\pi}_a$ をずらし, 更に π' において c_{i-1} と交わらない $\overline{\beta\pi}_b$ の正則近傍の

境界成分の方向に $\overline{\beta\pi_b}$ をずらせばよい. (図 4 は c_i を c_{i-1} と交わらないようにホモトピーによって変形した1つの例である.)

定義 3.4. レトラクション $r : \mathcal{AC}(N) \rightarrow \mathcal{C}(N)$ を次のように定める (例は図 5).

a が単純閉曲線るとき, $r(a) = a$ と定める.

a が単純弧るとき, a の端点を持つ N の境界成分を γ_1 と γ_2 とする ($\gamma_1 = \gamma_2$ も含む) と, $\gamma_1 \cup a \cup \gamma_2$ の正則近傍の1つの境界成分を $r(a)$ に対応させる. もし $\gamma_1 \cup a \cup \gamma_2$ の正則近傍の境界成分の個数が2つになった場合は, 本質的な単純閉曲線を1つ選ぶ.

このとき, 向き付け可能曲面の場合 ([5]) と同様に次の主張が成り立つ.

主張 3.5. r は 2-リプシッツである. すなわち, 任意の $a, b \in \mathcal{AC}(N)$ に対して r は $d_{\mathcal{C}}(r(a), r(b)) \leq 2d_{\mathcal{AC}}(a, b)$ を満たす.

向き付け可能曲面の場合との違いは, 単純弧 a, b が crosscap を奇数回通過することによって $r(a), r(b)$ が“ねじれる” 場合も考える必要があるということである. $\mathcal{AC}(N)$ 内での距離が1なる単純弧 a, b の組に対してのみ示せば十分で, その組のパターンは図 6 のように8つある. これら全てのパターンについて $r(a), r(b)$ がそれぞれねじれる場合とねじれない場合がある. しかし, どの場合でも $r(a)$ と $r(b)$ の両方に交わらない本質的な単純閉曲線 α が取れるということが言え, $r(a)$ と $r(b)$ の $\mathcal{C}(N)$ 内での距離が2以下になるということが示せる.

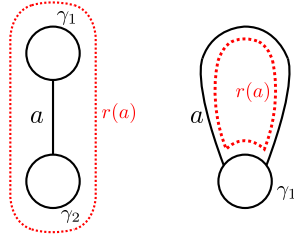


図 5: レトラクション $r : \mathcal{AC}(N) \rightarrow \mathcal{C}(N)$ の例.

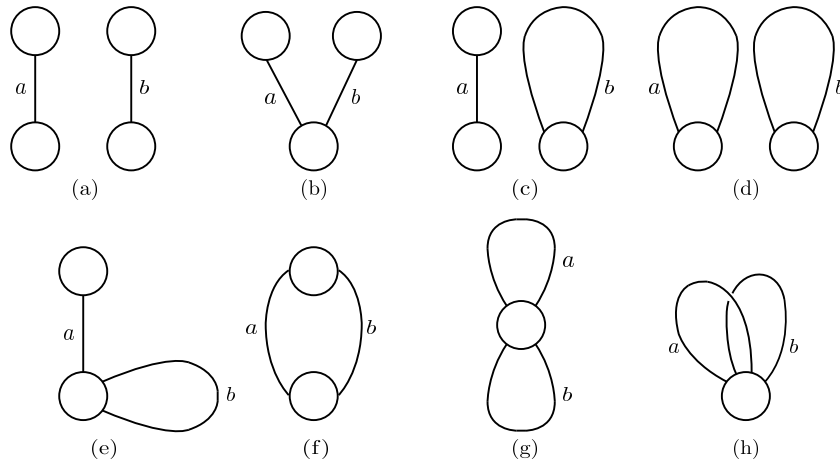


図 6: $d_{\mathcal{AC}}(a, b) = 1$ なる単純弧 a, b の組の8つの場合.

4. 主定理の証明の概略

unicorn path が $\mathcal{A}(N)$ 上の path として定義できたことから Hensel-Przytycki-Webb[5] による議論を向き付け不可能曲面の場合に適用することができる. この節では, 定理 1.1 の証明の概略を述べる. この証明は, 向き付け可能曲面の場合の Hensel-Przytycki-Webb[5] による証明に沿って与えられる.

定理 1.1 の証明の概略. $T = abd$ を $\mathcal{C}(N)$ 内の任意の測地三角形とする. 但し, $a, b, d \in \mathcal{C}^{(0)}(N)$ とする. $\bar{a}, \bar{b}, \bar{d}$ をそれぞれ a, b, d と $\mathcal{AC}(N)$ 内で隣接する $\mathcal{A}^{(0)}(N)$ の元とする. このとき次の主張が成り立つ.

主張 4.1. $\mathcal{P}$ を $\bar{a}$ と $\bar{b}$ の間の $\mathcal{A}(N)$ 内の任意の unicorn path とする. $\mathcal{G} = ab$ を a と b をつなぐ $\mathcal{C}(N)$ 内の T の辺とする. このとき, 任意の unicorn arc $c \in \mathcal{P}$ と $\mathcal{G}$ の距離は高々8となる.

更に, 次の補題も成り立つ.

補題 4.2. α, β, δ をそれぞれ $\bar{a}, \bar{b}, \bar{d}$ の端点の一方とする. このとき $\bar{c}' \in \mathcal{P}(\bar{a}^\alpha, \bar{b}^\beta)$, $\bar{c}'' \in \mathcal{P}(\bar{b}^\beta, \bar{d}^\delta)$, と $\bar{c}''' \in \mathcal{P}(\bar{d}^\delta, \bar{a}^\alpha)$ で互いに $\mathcal{A}(N)$ 内で隣接するものが存在する.

補題 4.2 によって与えられた $\mathcal{AC}(N)$ の頂点 $\bar{c}$ は, 主張 4.1 と補題 4.2 により, 測地三角形 T の $\mathcal{AC}(N)$ 内の9-中心となる. (図7を見よ.)

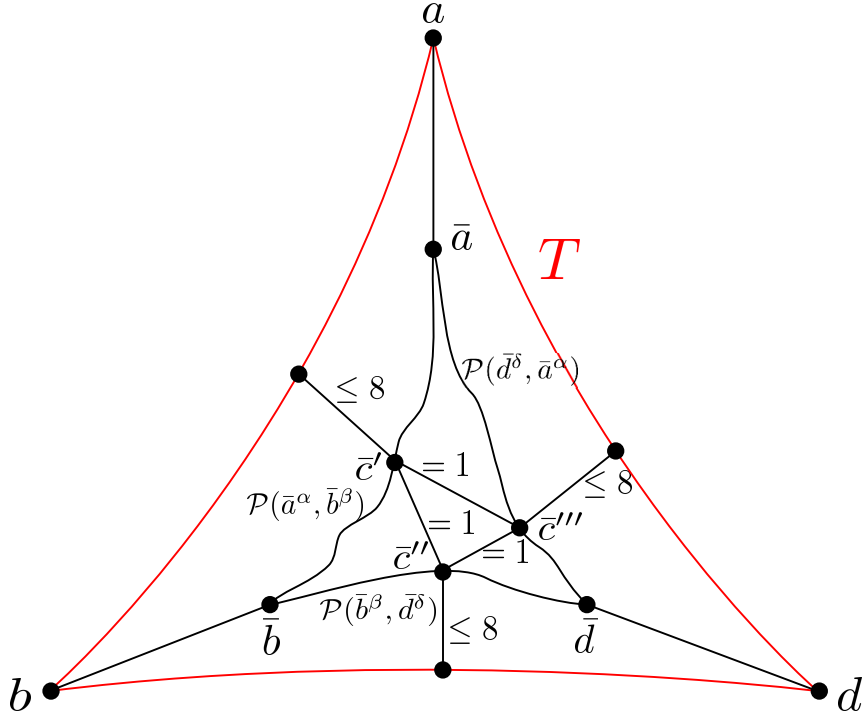


図 7: T は $\mathcal{AC}(N)$ 内で9-中心 $\bar{c}$ を持つ.

先で構成したレトラクション $r : \mathcal{AC}(N) \rightarrow \mathcal{C}(N)$ は2-リプシッツだったから, $r(\bar{c})$ は T の $\mathcal{C}(N)$ 内の17-中心となる. 以上より定理 1.1 が示せた. $\square$

謝辞

研究集会「結び目の数学 VII」での講演の機会を与えてくださった東京女子大学の大山淑之先生と新國亮先生には心より感謝申し上げます。また、本研究を行うにあたり熱心にご指導をしてくださった指導教官の大阪大学の金英子先生、大変有益な助言をくださった大阪大学の太田健一先生、宮地秀樹先生、そして東京理科大学の廣瀬進先生に改めて御礼申し上げます。

参考文献

- [1] T. Aougab, *Uniform hyperbolicity of the graphs of curves*, Geom. Topol. **17** (2013), no. 5, 2855-2875.
- [2] M. Bestvina and K. Fujiwara, *Quasi-homomorphisms on mapping class groups*, Glas. Mat. Ser. III **42 (62)** (2007), no. 1, 213-236.
- [3] B. H. Bowditch, *Uniform hyperbolicity of the curve graphs*, Pacific J. Math. **269** (2014), 269-280.
- [4] M. T. Clay, K. Rafi, and S. Schleimer, *Uniform hyperbolicity of the curve graph via surgery sequences*, to appear in Algebr. Geom. Topol.
- [5] S. Hensel, P. Przytycki, and R. C. H. Webb, *Slim unicorns and uniform hyperbolicity for arc graphs and curve graphs*, to appear in J. Eur. Math. Soc.
- [6] H. Masur and S. Schleimer, *The geometry of the disk complex*, J. Amer. Math. Soc. **26** (2013), no. 1, 1-62.