

ハンドル体結び目の射影図の自明化数と 非自明化数について

勝木 隆史

佐賀大学大学院 工学系研究科 数理科学専攻

1 ハンドル体結び目

1.1 ハンドル体結び目

$\mathbb{R}^3$ に埋め込まれたハンドル体を**ハンドル体結び目**という。ハンドル体結び目が**自明**であるとは、ハンドル体結び目が $\mathbb{R}^3$ に標準的に埋め込まれたハンドル体であるときをいう。2つのハンドル体結び目 H, H' が**同値**であるとは、 H を $\mathbb{R}^3$ の同位変形で H' に変形できるときをいう。

1.2 空間三価グラフ表示

$\mathbb{R}^3$ に埋め込まれた連結な有限グラフを**空間三価グラフ**という。2つの空間三価グラフ Γ, Γ' が**同値**であるとは、 Γ を $\mathbb{R}^3$ の同位変形で Γ' に変形できるときをいう。任意のハンドル体結び目 H はある空間三価グラフ Γ で表すことができる。すなわち、 Γ の管状近傍が H であるとき、 H は Γ により表される といい、 Γ は H を表す という。

2 射影図とダイアグラム

2.1 射影図とダイアグラム

$\mathbb{R}^3$ から $\mathbb{R}^2$ への自然な射影 p とは

$$p : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2; (x, y, z) \mapsto (x, y)$$

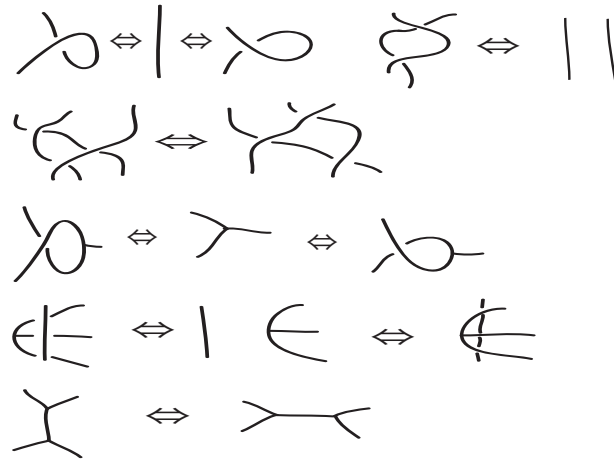


図 1:

である写像をいい、 p が空間グラフ Γ の射影であるとは、 Γ の像 $p(\Gamma)$ のすべての多重点が 2 つの辺の横断的な交差のみのときをいう。このとき $p(\Gamma)$ を Γ の射影図という。射影図の各二重点に Γ の上下 (すなわち z 成分の大小) の情報を下側の弧を切ることを入れた図をダイアグラムという。

ハンドル体結び目 H の射影図・ダイアグラムとは、それぞれ H を表す空間三価グラフの射影図・ダイアグラムで定義する。

2.2 ライデマイスター変形

ライデマイスター変形とは図 1 の変形操作のことである。

定理 1 ([2]). 2 つのハンドル体結び目 H, H' が同値であるための必要十分条件は H と H' が表すダイアグラムが有限回のライデマイスター変形に移り合うことである。

3 自明化数と非自明化数

3.1 準射影図、自明、非自明

上下の情報の入っていない二重点のことを **前交点** という。ある射影像 P に対して、 P の一部 (もしくは全部) の前交点に上下の情報をいれたも

のを P から得られた**準射影図** (もしくはダイアグラム) という。同様に、準射影図 Q に対して、 Q の一部 (もしくは全部) の前交点に上下をいれたものを Q から得られた**準射影図** (もしくはダイアグラム) という。

射影図または準射影図 Q が**自明**であるとは、 Q から得られる全てのダイアグラムが自明なハンドル体結び目を表しているときをいう。射影図または準射影図 Q が**非自明**であるとは、 Q から得られる全てのダイアグラムが非自明なハンドル体結び目を表しているときをいう。

3.2 自明化数、非自明化数の定義

$c(Q)$ を Q の交点の個数とする。射影図 P に対し、

$$\text{tr}(P) := \min\{c(Q) | Q : P \text{ から得られる自明な準射影図}\}$$

とし、このとき $\text{tr}(P)$ を P の**自明化数**と呼ぶ。射影図 P に対し、

$$\text{kn}(P) := \min\{c(Q) | Q : P \text{ から得られる非自明な準射影図}\}$$

とし、このとき $\text{kn}(P)$ を P の**非自明化数**と呼ぶ。

注 2. 射影図 P が自明であるとき $\text{kn}(P) = \infty$ と表す。また非自明な射影図は存在しない ([4] の命題 3.2 の証明)。

注 3. 自明化数、非自明化数はともに 1 にはならない。

4 主定理

図 2 の射影図を $P_{m,n}$ とする。

定理 4. m, n : 偶数とする。このとき、

$$\text{tr}(P_{m,n}) = \min\{m, n\}$$

である。

系 5. 任意の正の偶数 k に対して、あるハンドル体結び目の射影図 P が存在して、

$$\text{tr}(P) = k$$

を満たす。

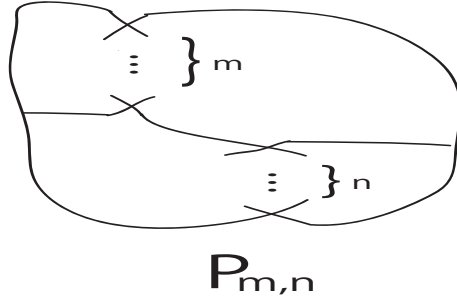


図 2:

証明. $P = P_{k,k}$ とすると定理 4 より $\text{tr}(P) = k$ となる。 □

注 6 ([1]). 結び目の場合は射影図 P の自明化数は必ず偶数となる。

定理 7. m, n : 偶数とする。このとき

$$\text{kn}(P_{m,n}) = \frac{m+n}{2} + 2$$

である。

系 8. 任意の 4 以上の整数 l に対して、あるハンドル体結び目の射影図 P が存在して、

$$\text{kn}(P) = l$$

を満たす。

証明. $P = P_{2,2l-6}$ とすると定理 7 より

$$\text{kn}(P) = \frac{2 + (2l - 6)}{2} + 2 = l$$

となる。 □

注 9 ([1]). 結び目の場合は任意の 3 以上の整数 l に対して系 8 と同様のことが成り立つ。

系 10. 任意の正の偶数 k 、任意の $k+2$ 以上の整数 l に対して、あるハンドル体結び目の射影図 P が存在して、

$$\text{tr}(P) = k, \text{kn}(P) = l$$

を満たす。

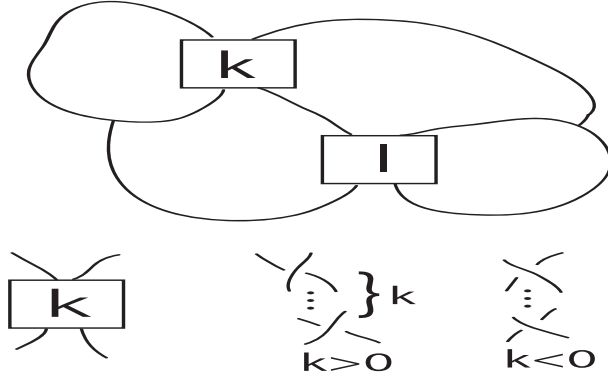


図 3:

証明. m, n が $m = k, n = -k + 2l - 4$ のとき、 $P_{m,n}$ は系 10 を満たすことを示す。ここで m, n は偶数であることに注意する。

まず $l \geq k + 2$ より、

$$n = -k + 2l - 4 \geq -k + 2(k + 2) - 4 = k = m$$

よって、

$$\text{tr}(P_{m,n}) = k$$

となる。また、

$$\text{kn}(P_{m,n}) = \frac{m+n}{2} + 2 = \frac{k - k + 2l - 4}{2} + 2 = l - 2 + 2 = l$$

となる。 □

注 11 ([1]). 結び目の場合は任意の偶数 k 、任意の 3 以上の整数 l に対して系 10 と同様のことが成り立つ。

5 主定理の証明

主定理の証明で次の命題を用いるので紹介する。

図 3 のダイアグラムが表すハンドル体結び目を $H_{k,l}(k, l \neq 0)$ とおく。

命題 12. k, l が偶数であるとき、 $H_{k,l}$ は自明でない。

命題 12 は [3] で定義されたカンドル彩色を用いて示せる。

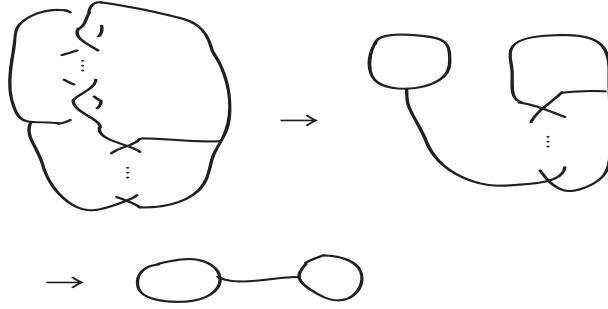


図 4:

証明. 図4のように上段の前交点に上下の情報を与えると自明になるので、 $\text{tr}(P_{m,n}) \leq m$ であることがわかる。同様にすると $\text{tr}(P_{m,n}) \leq n$ であることもわかる。従って、 $\text{tr}(P_{m,n}) \leq \min\{m, n\}$ となる。 $l = \text{tr}(P_{m,n})$ とおき、 $l < \min\{m, n\}$ と仮定する。 Q を $P_{m,n}$ から l 個前交点に上下を与えることで得られた自明な準射影図とする。 Q の上段の交点の個数を q , 下段の交点の個数を q' とおく。 $q + q' = l < \min\{m, n\}$ であるから $q, q' < \min\{m, n\}$ であることがわかる。ここで Q の上段の正の交点の個数を q_1 , 負の交点の個数を q_2 とする。このとき $q = q_1 + q_2$ となる。また $r = q_1 - q_2$ とおく。 $r \geq 0$ のとき、 Q の残りの前交点を全て正にし、 $\tilde{r} = r + m - q (> 0)$ とおく。 $r < 0$ のとき Q の残りの前交点を全て負にし、 $\tilde{r} = -(r + q - m) (< 0)$ とおく。同様の操作を下段に対しても行い $\tilde{s}$ を定義すると得られたハンドル体結び目は $H_{\tilde{r}, \tilde{s}}$ と同値。命題 12 より $H_{\tilde{r}, \tilde{s}}$ は自明でない。これは Q が自明な準射影図であることに矛盾。従って、 $\text{tr}(P_{m,n}) \not\leq \min\{m, n\}$ が示せた。よって、 $\text{tr}(P_{m,n}) = \min\{m, n\}$ であることが示せた。 $\square$

証明. 上段の前交点に $\frac{m}{2}$ 個以下の正（負）の交点を付けても、残りの前交点の交点の上下をうまく付けると正の交点の個数と負の交点の個数が一致して自明にできる。従って、 $\text{kn}(P_{m,n}) \geq \frac{m}{2} + 1 + \frac{n}{2} + 1 = \frac{m+n}{2} + 2$ 。

ここで $P_{m,n}$ に図5のように交点を与えることで得られた準射影図を $Q_{m,n}$ とおく。 $Q_{m,n}$ から得られるダイアグラムは正の数 k, l が存在して $H_{k,l}$ を表す。命題 12 より $H_{k,l}$ は自明でないので、 $Q_{m,n}$ も非自明。従って $\text{kn}(P_{m,n}) = \frac{m+n}{2} + 2$ が示せた。 $\square$

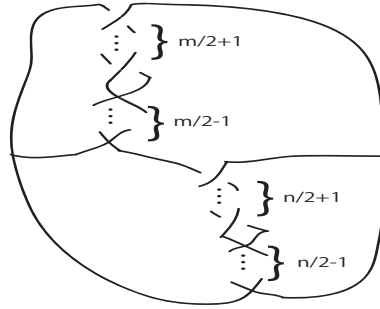


図 5:

参考文献

- [1] Ryo Hanaki, *Pseudo diagrams of knots, links and spatial graphs*, Osaka J. Math. 47 (2010), 863-883.
- [2] Atsushi Ishii, *Moves and invariants for knotted handlebodies*, Algebr. Geom. Topol. 8 (2008), 1403-1418
- [3] Atsushi Ishii and Masahide Iwakiri, *Quandle cocycle invariants for spatial graphs and knotted handlebodies*, Canad. J. Math. 64 (2012), 102-122.
- [4] Ryo Nikkuni, Makoto Ozawa, Kouki Taniyama, and Yukihiro Tsutsumi, *Newly found forbidden graphs for trivializability*, J. Knot Theory Ramifications 14 (2005), 523-538