

# The Sharp Move

金信 沙織 (神戸大学大学院 修士1年)

平成 27 年 1 月 15 日

## 概要

# unknotting number が 1 である composite knot が存在することが知られている. この研究では特に composite knot の両因子の bridge index が  $n$  ( $n$ : 3 or even integer) であるような knot の構成に関する結果を紹介する.

## 1 Introduction.

knot diagram  $K$  の一部を図 1 のように変形する local move を **crossing change** という. crossing change は unknotting operation である. また,  $K$  から trivial knot を得るのに必要な crossing change の回数の最小値 **unknotting number** といい,  $u(K)$  と表す.



図 1: crossing change

**1.1 Theorem ([4]).**  $u(K) = 1$  ならば  $K$  は prime である.

例えば, trefoil knot は図 2 のように 1 回の crossing change で trivial knot になる. したがって, trefoil knot は prime であるとわかる.



図 2:  $u(K) = 1$  の例

knot diagram  $K$  の一部を図 3 のように変形する local move を  **$\Delta$  move** という ([3]).  $\Delta$  move は unknotting operation である. また,  $K$  から trivial knot を得るのに必要な  $\Delta$  move の回数の最小値を  **$\Delta$  unknotting number** といい,  $u_{\Delta}(K)$  と書く. 例えば, 図 4 のように trefoil knot は 1 回の  $\Delta$  move で trivial knot になる.

**1.2 Question.**  $u_{\Delta}(K) = 1$  ならば  $K$  は prime であるか?

現在のところ  $u_{\Delta}(K) = 1$  を満たすような composite knot は見つかっておらず, 未解決問題の一つである.

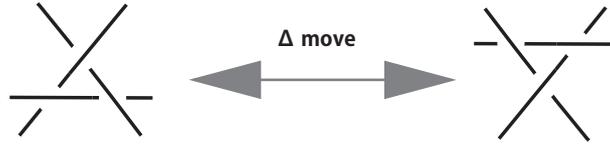


図 3:  $\Delta$  move

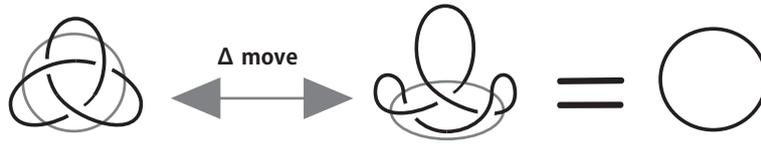


図 4:  $u_{\Delta}(K) = 1$  の例

**1.3 Definition ([2]).** knot diagram  $K$  の一部を図 5 のように変形する local move を  $\#$  move という.  $\#$  move は unknotting operation である. また,  $K$  から trivial knot を得るのに必要な  $\#$  move の回数の最小値を  $\#$  unknotting number といい,  $u_{\#}(K)$  と書く. 例えば, 図 6 のように trefoil knot は 1 回の  $\#$  move で trivial knot になる.



図 5:  $\#$  move

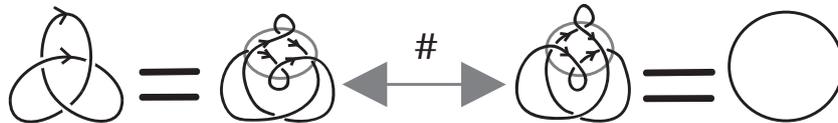


図 6:  $u_{\#}(K) = 1$  の例

**1.4 Question.**  $u_{\#}(K) = 1$  ならば  $K$  は prime であるか?

詳細は 2 Background に記載する.

## 2 Background.

**2.1 Theorem ([6]).**  $K$  を trefoil knot,  $J_n$  を  $C(4, 2n)$  とする. このとき,  $u_{\#}(K \sharp J_n) = 1$  である.

**Proof.** 図7より,  $K \# J_n$  について trefoil knot と  $C(4, 2n)$  のアンチパラレルな4ひねりの一部分を变形することで一回の # move で trivial knot になることがわかる. また,  $J_n$  は, Conway polynomial により各  $n$  で異なる結び目であることがわかる.

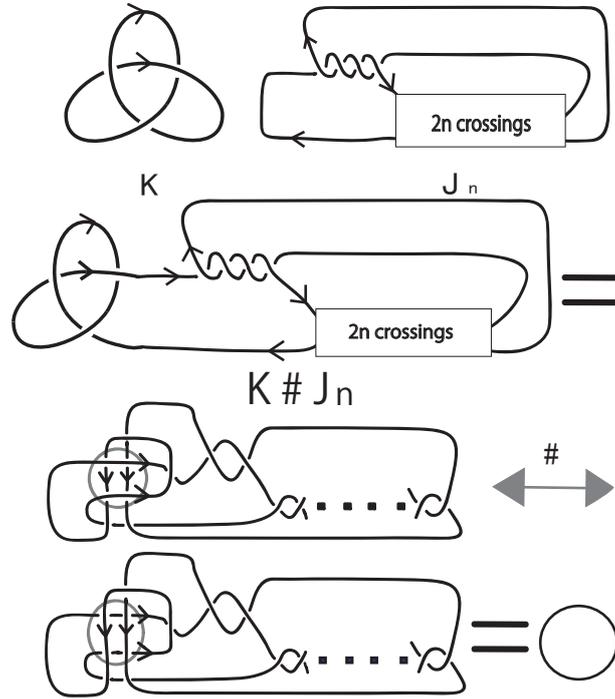


図7:  $u(K \# J_n) = 1$

次に, # move に関して, 知られている事実を確認する. まず, 一回の # move で生成する local move を紹介する. (1) パラレルな4ひねりが一回の # move で解消する. (2) パラレルまたはアンチパラレルな5ひねりが一回の # move で図8のような3ひねりになる. (3) パラレルな2本の arc と垂直な arc が一回の # move で2ひねりになる. (4) アンチパラレルな4ひねりが一回の # move でスプリットして trefoil knot に変形する.

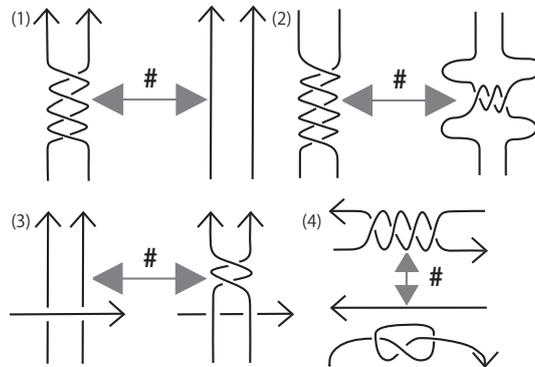


図8: 一回の # move で生成する local move

**2.2 Definition ([2]).**  $K, K'$  を oriented knot とする.  $K$  から  $K'$  を得るのに必要な # move の回数の最小値を # **gordian distance** といい,  $d_G^\#(K, K')$  と書く. また,  $K'$  が trivial knot なら,  $d_G^\#(K, \bigcirc) = u_\#(K)$  である.

**2.3 Theorem ([2]).**  $K, K'$  を oriented knot とする.  $d_G^\#(K, K') = 1$  ならば  $\text{Arf}(K) \neq \text{Arf}(K')$  である.

例えば, 交点数が5以下の prime knot について, 一回の # move でどのように変化するかを図9にまとめた. trefoil knot と  $5_1$  は一回の (1) で trivial knot になる. また, それぞれの Arf 不変量が1であることも確認できる.  $5_2$  は Arf 不変量が0であることから, 一回の # move では trivial knot にならないことがわかる. 実際,  $5_2$  は一回の # move で trefoil knot か又は  $4_1$  になる.

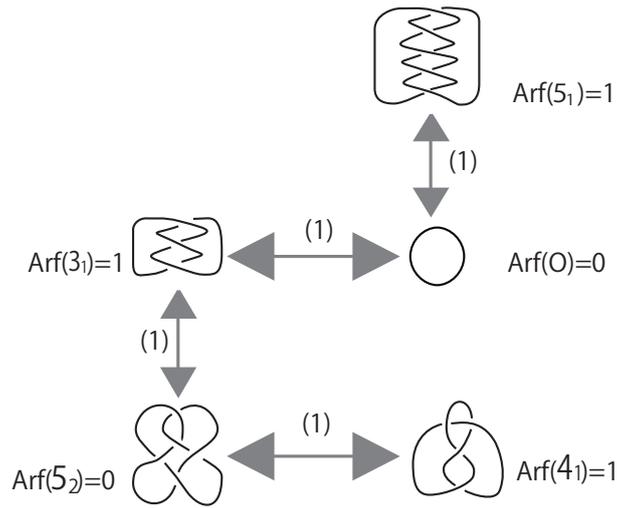


図 9:  $d_G^\#(K, K') = 1$  の例

### 3 Main Theorem.

Main theorem についてを紹介する. Main theorem は 2.1 で紹介した Theorem をより拡張した Theorem となる.

**3.1 Theorem.**  $n$  を 3 または偶数とする. (1), (2) を満たすような knot の無限集合族  $J_1, J_2, \dots, J_p, \dots$  と  $K_1, K_2, \dots, K_q, \dots$  が存在する.

- (1)  $J_p$  と  $K_q$  は  $n$ -bridge knot である.
- (2)  $u_\#(J_p \# K_q) = 1$  ( $p, q = 1, 2, \dots$ ) である.
- (3)  $u_\#(J_p) = 1, u_\#(K_q) = 2$  である.

**証明.**  $n = 2, 3, 4$  の場合を特に言及していく. はじめに Theorem 3.1 (3) を確認する. 図 10, 11 より  $J_p$  は各  $n$  でパラレルな 4 ひねりの部分に local move (1) を一回施すと trivial knot になる.  $K_q$

は各  $n$  でアンチパラレルな 4 ひねりの部分に local move (4) を一回施すとスプリットされて trefoil knot になる. 次に, local move (1) を一回施すと trivial knot になる.

**n=2.**  $J_p$  は  $C(-4, 2p-1)$ ,  $K_q$  は  $C(4, -2q)$  である. (図 10 上参照)  $J_p$  と  $K_q$  の下のひねり数が偶奇で異なっている. そのため上のひねりに関して  $J_p$  ではパラレルなひねりであるが,  $K_q$  ではアンチパラレルなひねりである. 次に  $J_p$  について Conway polynomial を使うと, 各  $p$  で異なることがわかる.  $K_q$  について Conway polynomial を使うと, 各  $q$  で異なることがわかる.

**n=3.**  $J_p$  と  $K_q$  は図 10 下図で示す通りである.  $J_p$  は Montesinos knot である.

$J_p = M(r_1, r_2, r_3)$  とおく.  $r_1 = \frac{5}{4}$ ,  $r_2 = \frac{1}{2p+1}$ ,  $r_3 = -\frac{1}{2p}$  である. また,  $J_p$  は Conway polynomial の 2 次の係数が各  $p$  で異なることがわかる.  $K_q$  は上の部分はアンチパラレルな 4 ひねりである. また, 下の部分は  $q+1, -q, q, -q-1$  ひねりである.  $K_q$  は Jones polynomial の最高次数から各  $q$  で異なることがわかる. また,  $J_p$  は Conway polynomial を使うと各  $p$  で異なることがわかる.  $J_p$  と  $K_q$  は 3 bridge 以下であることは knot を変形するとわかる. 2 bridge knot だと 2-fold branched covering が lens space になるが  $J_p$  はならないので,  $J_p$  は 2 bridge knot ではない. ゆえに  $J_p$  は 3 bridge knot である.  $K_q$  は Kinoshita-Terasaka knot である.

Kinoshita-Terasaka knot は Alexander polynomial が 1 になることが知られているので 3 bridge 以上であることがわかる. ゆえに  $K_q$  は 3 bridge knot である.

**n=4.**  $J_p$  と  $K_q$  は図 11 で示す通りである. どちらも Conway polynomial を使うと各  $p, q$  で異なることがわかる. 図 11 の上の部分について  $J_p, K_q$  どちらも trefoil knot の二重ケーブルである. よって trefoil knot は 2 bridge であるので, 二重のケーブルにすることで  $J_p$  と  $K_q$  は 4 bridge になる. trefoil knot の部分と  $\frac{n}{2}$  bridge knot に取り替えることにより (1) を満たす  $J_p$  と  $K_q$  を作ることができる. また,  $n$  が 4 以上の偶数の場合 bridge index の決定は Schubert の結果を使う.

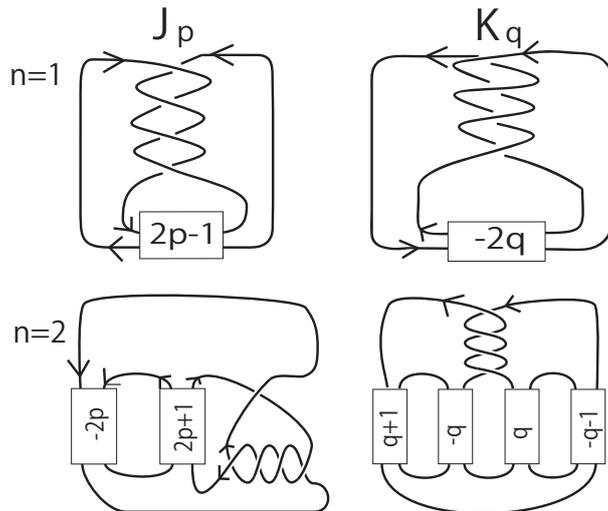


図 10: 2,3 bridge knot

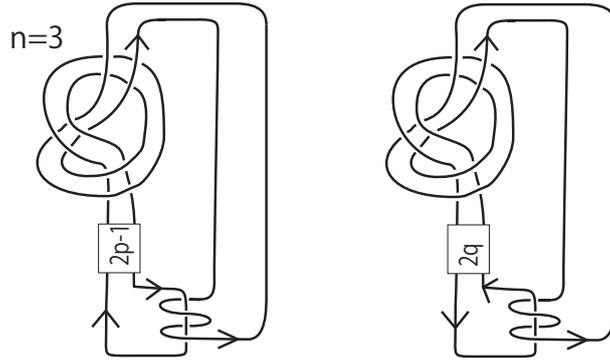


図 11: 4 bridge knot

## 4 Proof of The Theorem.

今回は  $n = 2$  の時の証明を考えていく.

**4.1 Lemma.** 図 12 のようにアンチパラレルな 4 ひねりが一回の # move でスプリットして  $C(4, -2q)$  になる.

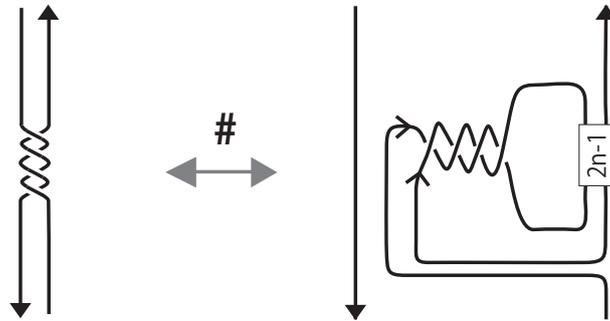


図 12: Lemma

**Proof.**

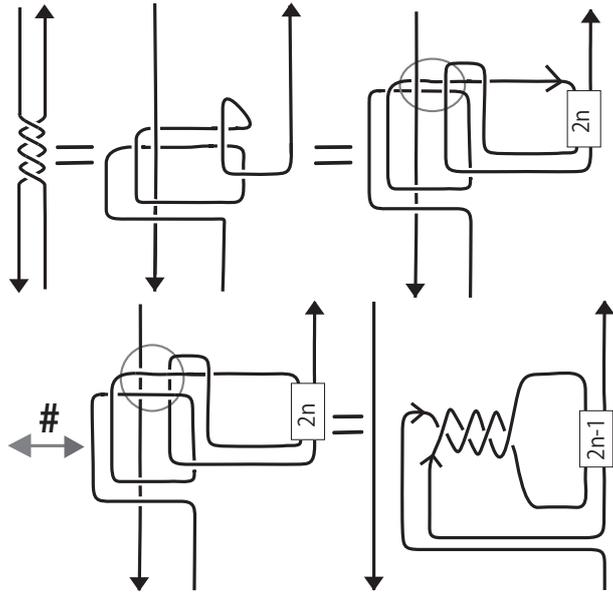


図 13: Lemma の証明

**Proof of Main Theorem ( $n=2$ ).** Lemma より  $J_p$  は一回の  $\#$  move でアンチパラレルな 4 ひねりになる. よって  $K_q$  の上の 4 ひねりの部分がほどける. そのことで  $J_p \# K_q$  はほどけて trivial knot になる.

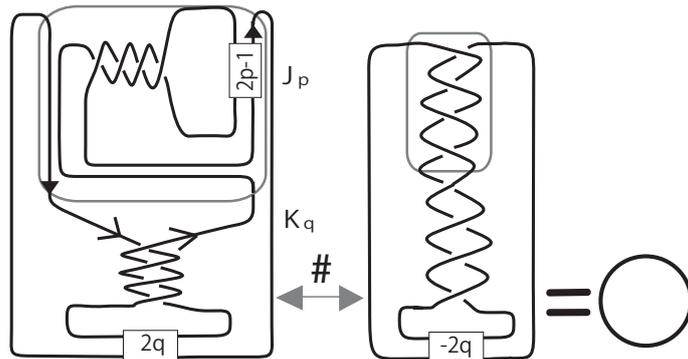


図 14: Main theorem の証明

Lemma について  $J_p$  は一回の  $\#$  move でアンチパラレルな 4 ひねりになるように作った. 今回は  $n=2$  について示したが 3.1 で紹介した  $n=2, 3, 4$  の  $J_p$  はすべて一回の  $\#$  move でアンチパラレルな 4 ひねりになるので次の Theorem が言える.

**4.2 Theorem.**  $n, m$  を 3 または偶数とする. (1), (2) を満たすような knot の無限集合族  $J_1, J_2, \dots, J_p, \dots$  と  $K_1, K_2, \dots, K_q, \dots$  が存在する.

(1)  $J_p$  は  $n$ -bridge knot である.  $K_q$  は  $m$ -bridge knot である.

(2)  $u_{\#}(J_p \# K_q) = 1$  ( $p, q = 1, 2, \dots$ ) である.

(3)  $u_{\#}(J_p) = 1$ ,  $u_{\#}(K_q) = 2$  である.

**Proof.**  $n = 2$ ,  $m = 4$  のときを考える.

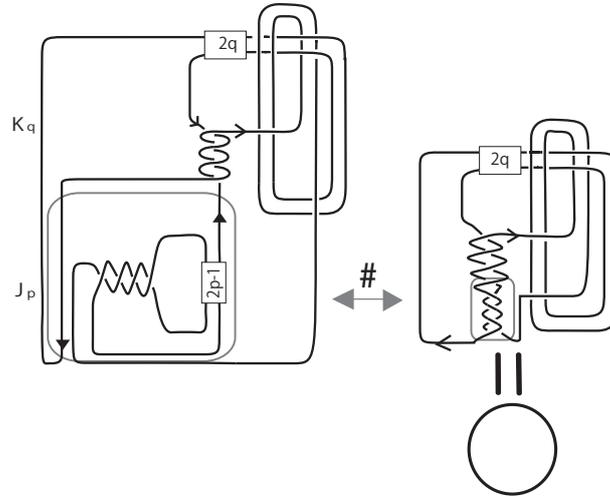


図 15: Theorem の証明

## 参考文献

- [1] J. H. Conway, *An enumeration of knots and links, and some of their algebraic properties*, Proc. Conf. Oxford. (1970), 329–358.
- [2] H. Murakami, *Some metrics on classical knots*, Math. Ann. **270** (1985), 35–45.
- [3] H. Murakami, Y. Nakanishi, *On a certain move generating link-homology*, Math. Ann. **284** (1989), 75–89.
- [4] M. G. Scharlemann, *Unknotting number one knots are prime*, Invent. Math. **82** (1985), 37–55.
- [5] H. Wendt, *Die gordische Auflösung von Knoten*, (German) Math. Z. **42** (1937), no. 1, 680–696.
- [6] 坂井 佐久子, 古典的結び目に対する  $\#$ -unknotting operation について, 大阪大学大学院理学研究科修士論文 (1992).