

# Unknotting numbers for handlebody-knots and Alexander quandle colorings

岩切 雅英

佐賀大学大学院 工学系研究科

## 1 ハンドル体結び目

ハンドル体結び目とは3次元空間  $\mathbb{R}^3$  に埋め込まれたハンドル体のことである ([2]). 2つのハンドル体結び目  $H_1, H_2$  が同値であるとは,  $h(H_1) = H_2$  となるような向きを保つ  $\mathbb{R}^3$  の同相写像  $h$  が存在することである. 任意のハンドル体結び目は spine を取ることで空間3価グラフで表すことができる. ハンドル体結び目が自明であるとは  $\mathbb{R}^3$  に標準的に埋め込まれたハンドル体をいい (図1左), 図1右の空間グラフで表される.

ハンドル体結び目  $H$  のダイアグラムとは,  $H$  を表す空間3価グラフのダイアグラムのことである. 図2のダイアグラムにおける変形を R1-6 変形という. 任意のハンドル体結び目  $H, H'$  に対して,  $H, H'$  が同値であることとそれらのダイアグラムが有限回の R1-6 変形で移り合うことが必要十分である ([2]).

## 2 交差交換と結び目解消数

ハンドル体結び目  $H$  の交差交換とは,  $H$  を表す空間3価グラフにおける交差交換のことである (図3右). 交差交換は図3左のようなチューブの入れ替えを表している.

**命題 2.1.** 任意のハンドル体結び目は有限回の交差交換を施すことで自明なハンドル体結び目に変形できる.

ハンドル体結び目  $H$  の unknotting number とは自明なハンドル体結び目を得るために必要な交差交換の最小回数のことであり,  $u(H)$  と表される.

## 3 カンドルとカンドル彩色

カンドル  $X$  とは, 以下の公理を満たすような二項演算  $*$ :  $X \times X \rightarrow X$  付きの空でない集合  $X$  のことである ([6, 7]).

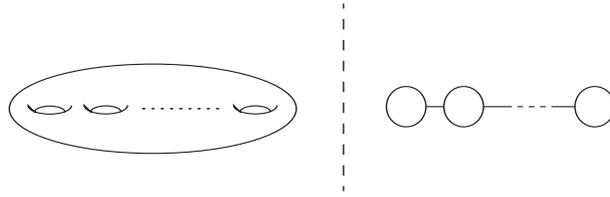


図 1: 自明なハンドル体結び目とそれを表す空間 3 価グラフ

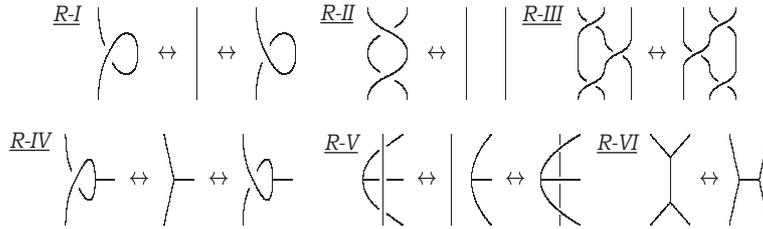


図 2: R1-6 変形

- 任意の  $x \in X$  に対して,  $x * x = x$ .
- 任意の  $x \in X$  に対して,  $S_x(y) = y * x$  と定義される  $S_x : X \rightarrow X$  が全単射.
- 任意の  $x, y, z \in X$  に対して,  $(x * y) * z = (x * z) * (y * z)$ .

位数  $n$  の二面体カンドル  $R_n$  とは,  $R_n = \mathbb{Z}_n (= \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$  上に二項演算  $x * y = 2y - x$  を与えたものである.  $\Lambda$  を変数  $t$  のローラン多項式環とする. アレクサンダーカンドル  $M$  とは,  $\Lambda$ -加群  $M$  上に二項演算  $x * y = tx + (1 - t)y$  を与えたものである.  $R_n$  はアレクサンダーカンドル  $\Lambda/(n, t + 1)$  とカンドルとして同型であることが知られている.

整数  $i$  に対して,  $a *^i b := S_b^i(a)$  と表す. アレクサンダーカンドル  $M$  においては,  $a *^i b = t^i a + (1 - t^i)b$  となる. カンドル  $X$  が **type**  $m$  とは

$$m = \min\{k \in \mathbb{N} \mid \text{任意の } a, b \in X \text{ に対して, } a *^k b = a \text{ となる.}\}$$

を満たすことである. 例えば, 二面体カンドル  $R_n$  は type 2 である.

$D$  をハンドル体結び目  $H$  のダイアグラムとする. ここから  $D$  のカンドル彩色を定義する ([2, 3, 4]).  $D$  の **arc** とは,  $D$  上の曲線で両端点が undercrossing か頂点であるものをいう.  $D$  の arc の集合を  $\mathcal{A}(D)$  という.  $D$  の各辺には normal orientation が与えられているとする.

$A$  をアーベル群とする. 写像  $\varphi : \mathcal{A}(D) \rightarrow A$  が以下の条件を満たすとき  $D$  の  $A$ -flow であるという (図 4).

- (i) 各交点  $\chi$  において,  $\chi$  の under-arc を  $\chi_1, \chi_2$  とする時,  $\varphi(\chi_1) = \varphi(\chi_2)$ .

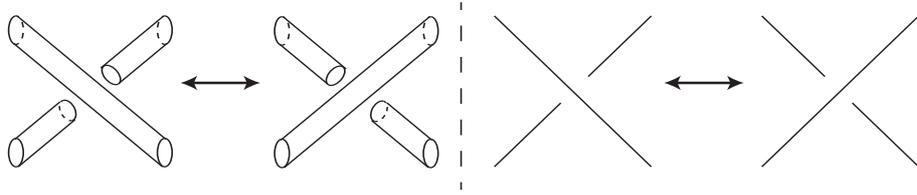


図 3: 交差交換

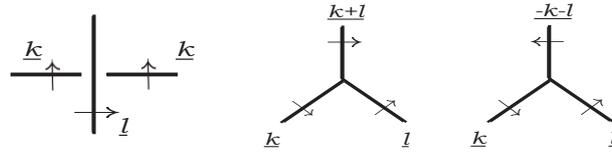


図 4:

(ii) 各頂点  $\omega$  において,  $\omega$  に接合する 3 つの arc を  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$  とする時,  

$$\sum_{i=1}^3 \epsilon(\omega_i; \omega) \varphi(\omega_i) = 0.$$
ただし,  $\omega_i$  の normal orientation が  $\omega$  で時計回りの時,  $\epsilon(\omega_i; \omega) = 1$  とし, そうでない時,  $\epsilon(\omega_i; \omega) = -1$  とする.

本稿の図において,  $A$  の元は下線付きで表す.  $D$  の  $A$ -flow の集合を  $\text{Flow}(D; A)$  と表す.  $A$ -flow 付きのハンドル体結び目ダイアグラム  $(D, \varphi)$  は normal orientation が与えられたダイアグラム  $D$  と  $A$ -flow  $\varphi \in \text{Flow}(D; A)$  の組のことである.

$X$  を type  $m$  のカンドル,  $(D, \varphi)$  を  $\mathbb{Z}_m$ -flow 付きのハンドル体結び目ダイアグラムとおく. 写像  $C: \mathcal{A}(D) \rightarrow X$  が各交点において以下の条件を満たすとき  $(D, \varphi)$  の  $X$ -coloring という (図 5).

(i) 各交点  $\chi$  において,  $\chi$  の under-arc を  $\chi_1, \chi_2$  と over-arc を  $\chi_3$  とし,  $\chi_3$  の normal orientation が  $\chi_1$  から  $\chi_2$  である時,  $C(\chi_2) = C(\chi_1) *^{\varphi(\chi_3)} C(\chi_3)$ .

(ii) 各頂点  $\omega$  において,  $\omega$  に接合する 3 つの arc を  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$  とする時,  $C(\omega_1) = C(\omega_2) = C(\omega_3)$ .

$(D, \varphi)$  の  $X$ -colorings の集合を  $\text{Col}_X(D, \varphi)$  とおく. 図 6 は  $\mathbb{Z}_2$ -flow 付きのハンドル体結び目ダイアグラム  $(D_{4_1}, \varphi)$  であり, 図 7 は  $(D_{4_1}, \varphi)$  の  $X$ -coloring の例である.

$\Lambda$  を変数  $t$  のローラン多項式環とする.  $p$  を奇素数とし,  $\Lambda_p = \Lambda/(p)$  とおく.  $\Lambda_p$  の既約多項式  $h(t)$  で  $h(t) \neq t, t-1$  となるものに対して,  $\mathbb{F}_q = \Lambda_p/(h(t))$  とおく.  $\mathbb{F}_q$  は有限体であり, アレクサンダーカンドルである. この時,  $\text{Col}_{\mathbb{F}_q}(D, \varphi)$  に  $\mathbb{F}_q$  上のベクトル空間の構造が入り, 表示  $\text{Col}_{\mathbb{F}_q}(D, \varphi) = \langle \mathcal{A}(D) \mid \mathcal{R}(D) \rangle_{\mathbb{F}_q}$ ,  $\mathcal{R}(D) = \{ \text{各交点で } z = t^l x + (1-t^l)y, \text{各頂点で } x = y = z \text{ (図 8)} \}$  をもつ.

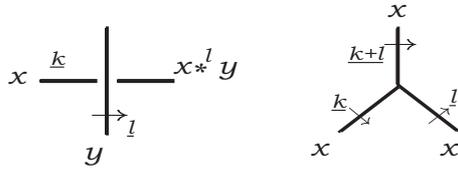


図 5:

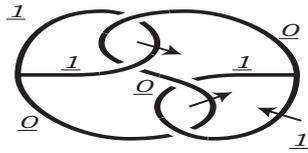


図 6:  $\mathbb{Z}_2$ -flow の例

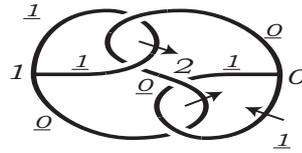


図 7:  $X$ -coloring の例

$\mathbb{Z}_2$ -flow 付きのハンドル体結び目ダイアグラム  $(D_{4_1}, \varphi)$ (図 9) とその arc  $a, b, \dots, g$  に対して, 表示は

$$\text{Col}_{R_3}(D_{4_1}, \varphi) \cong \left\langle \begin{array}{l|l} a, b, c, d, & a = b = c, 2b - e = d, a = b, \\ e, f, g & e = f = g, 2g - c = d, f = g \end{array} \right\rangle_{R_3}$$

で与えられる.

## 4 主定理

**定理 4.1.**  $H$  をハンドル体結び目,  $m = 2$  または  $3$ ,  $(D, \varphi)$  を  $H$  の  $\mathbb{Z}_m$ -flow 付きのハンドル体結び目ダイアグラムとする. アレクサンダーカンドル  $\mathbb{F}_q$  が type  $m$  ならば,  $\dim \text{Col}_{\mathbb{F}_q}(D, \varphi) - 1 \leq u(H)$  が成り立つ.

定理 4.1 は命題 4.2 の一部分の一般化である.

**命題 4.2** (Clark-Elhamdadi-Saito-Yeatman [1]).  $D$  を結び目  $K$  のダイアグラムとする. そのとき,  $\dim \text{Col}_{\mathbb{F}_q}(D) - 1 \leq u(K)$  が成り立つ. ただし  $\text{Col}_{\mathbb{F}_q}(D)$  は  $D$  の  $\mathbb{F}_q$ -彩色全体の集合であり,  $u(K)$  は結び目  $K$  の unknotting number である.

命題 4.2 は 3-彩色に関する J. Przytycki の結果 ([10]) の一般化である. W. E. Clark, M. Elhamdadi, M. Saito and T. Yeatman([1]) は Nakanishi index  $m(K)$ (cf. [8]) の下からの評価を与えることで命題 4.2 を示した.

定理 4.1 により, 任意の自然数  $n$  に対して, unknotting number が  $n$  であるハンドル体結び目の例が以下のように得られる.  $A_n, B_n, C_n$  をそれぞれ図 10

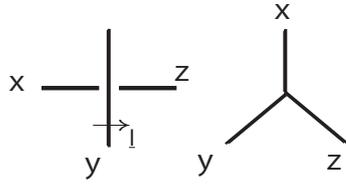


図 8:

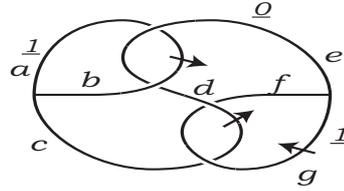


図 9:

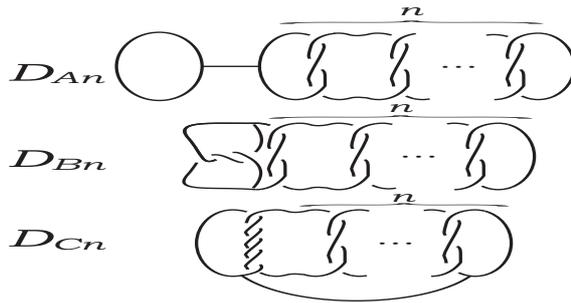


図 10:  $D_{A_n}, D_{B_n}, D_{C_n}$

のダイグラム  $D_{A_n}, D_{B_n}, D_{C_n}$  で表されるハンドル結び目とする. ただし,  $n$  はダイアグラムの右側に並んでいる 3 - half twist の個数である.  $A_n$  は可約なハンドル体結び目であり,  $B_n$  は既約なハンドル体結び目であることがわかる ([5]).

系 4.3. 任意の自然数  $n$  に対して,  $u(A_n) = u(B_n) = u(C_n) = n$ .

## 5 主定理の証明の要約

§3のように,  $\text{Col}_{\mathbb{F}_q}(D, \varphi)$  は表示  $\langle \mathcal{A}(D) \mid \mathcal{R}(D) \rangle_{\mathbb{F}_q}$  をもつ. まず,  $\text{Col}_{\mathbb{F}_q}(D, \varphi)$  が以下のような別の表示  $\langle \mathcal{SA}(D) \mid \mathcal{SR}(D) \rangle_{\mathbb{F}_q}$  をもつことに注意する.

- $D$  の **semi-arc** とは,  $D$  上の曲線で両端点が crossing か頂点であるものをいい, semi-arc の集合を  $\mathcal{SA}(D)$  と表す
- $\mathcal{SR}(D) = \{ \text{各交点で } z = t^l x + (1 - t^l)y, y = w, \text{各頂点で } x = y = z (\text{図 11}) \}$  とおく.

$\mathbb{Z}_2$ -flow 付きのハンドル体結び目ダイアグラム  $(D_{4_1}, \varphi)$  (図 12) とその semi-arc  $a, b, \dots, k$  に対して, 表示は

$$\mathcal{SA}(D) = \{a, b, \dots, k\},$$

$$\mathcal{SR}(D) = \left\{ \begin{array}{l} a = b = c, e = f = g, a = i, e = h, b = i, \\ 2i - h = d, d = k, f = j, g = j, 2g - c = k \end{array} \right\}$$

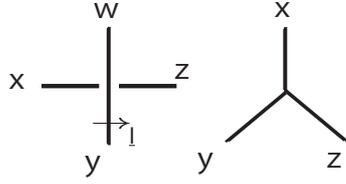


図 11:

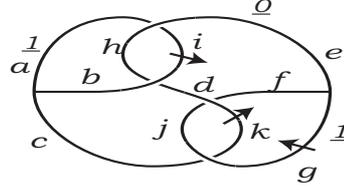


図 12:

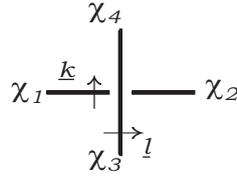


図 13:

により与えられる.

**命題 5.1.**  $(D, \varphi)$  を  $\mathbb{Z}_m$ -flow 付きのハンドル体結び目ダイアグラム,  $\mathbb{F}_q$  を §3 で定義された type  $m$  の有限アレクサンダーカンドルとする. 交点  $\chi$  において,  $x, y$  をそれぞれ under-arc, over-arc とし,  $k = \varphi(x), l = \varphi(y)$  とおく.  $D'$  を  $D$  から  $\chi$  での交差交換で得られたダイアグラムとし,  $\varphi' \in \text{Flow}(D; \mathbb{Z}_m)$  を  $\varphi$  から自然に選ぶ.  $kl = 0, k = l, k + l = 0 \pmod{m}$  のいずれかが成り立つ時,  $\text{Col}_{\mathbb{F}_q}(D, \varphi)$  と  $\text{Col}_{\mathbb{F}_q}(D', \varphi')$  の次元の差は多くとも 1 である.

*Proof.*  $D$  と  $D'$  の semi-arc の集合  $\mathcal{SA}(D)$  と  $\mathcal{SA}(D')$  を同一視する. このとき,  $\mathcal{SR}(D)$  と  $\mathcal{SR}(D')$  は  $\chi$  に関係した relator だけの違いしかない.  $\chi$  での 4 つの semi-arc の color  $\chi_1, \chi_2, \chi_3, \chi_4$  を図 13 のようにとる.

本稿では  $k+l=0$  の時のみ証明する.  $\mathcal{SR}(D)$  の  $\chi$  での relator は  $t^l \chi_1 + (1-t^l) \chi_3 = \chi_2$  と  $\chi_3 = \chi_4$  である. これらの relator は  $t^l \chi_1 + \chi_3 - t^l \chi_4 = \chi_2$  と  $\chi_3 = \chi_4$  に置き換えられる. 一方,  $\mathcal{SR}(D')$  の  $\chi$  での relator は  $t^k \chi_3 + (1-t^k) \chi_1 = \chi_4$  と  $\chi_1 = \chi_2$  である. これらの relator は  $t^k \chi_3 + \chi_1 - t^k \chi_2 = \chi_4$  と  $\chi_1 = \chi_2$  に置き換えられる.  $t^l \chi_1 + \chi_3 - t^l \chi_4 = \chi_2$  に  $t^k$  倍すると  $t^k t^l \chi_1 + t^k \chi_3 - t^k t^l \chi_4 = t^k \chi_2$  が得られるので,  $\mathcal{SR}(D)$  と  $\mathcal{SR}(D')$  の relator の違いは結局 1 つしかない. したがって,  $\text{Col}_{\mathbb{F}_q}(D, \varphi)$  と  $\text{Col}_{\mathbb{F}_q}(D', \varphi')$  の次元の差は多くとも 1 である.  $\square$

定理 4.1 の証明. 仮定より,  $m = 2$  または  $3$  である. 交点  $\chi$  において,  $x, y$  をそれぞれ under-arc, over-arc とし,  $k = \varphi(x), l = \varphi(y)$  とおく.  $D'$  を  $D$  から  $\chi$  での交差交換で得られたダイアグラムとし,  $\varphi' \in \text{Flow}(D; \mathbb{Z}_m)$  を  $\varphi$  から自然に選ぶ.  $m = 2$  のとき,  $kl = 0$  または  $k = l = 1$  を満たす.  $m = 3$  のとき,  $kl = 0, k = l = 1, 2, k + l = 0$  のいずれかを満たす. 命題 5.1 より,  $\text{Col}_{\mathbb{F}_q}(D, \varphi)$  と  $\text{Col}_{\mathbb{F}_q}(D', \varphi')$  の次元の差は多くとも 1 である.

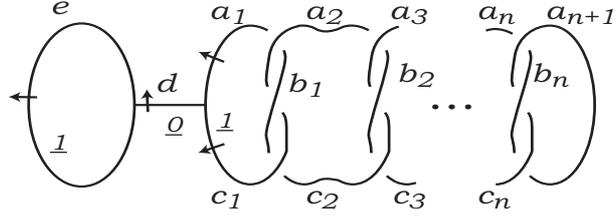


図 14:

自明なハンドル体結び目の場合は、そのダイグラム  $E$  や  $\mathbb{Z}_m$ -flow  $\psi$  の取り方によらず  $\dim \text{Col}_{\mathbb{F}_q}(E, \psi) = 1$  より、定理 4.1 の証明を得る。□

**注 5.2.** 通常の結び目のカンドル彩色はすべての flow が 1 のハンドル体結び目の彩色と思える。このことから、命題 5.1 により、命題 4.2 が証明できる。

## 6 系 4.3 の証明

系 4.3 の証明. 本稿では  $A_n$  についてのみ示す. 図 14 のように  $D_{A_n}$  の arc  $a_i, b_j, c_j, d, e$  ( $i \in \{1, \dots, n+1\}, j \in \{1, \dots, n\}$ ) をとり,  $\mathbb{Z}_2$ -flow  $\varphi$  を与える.  $\text{Col}_{R_3}(D_{A_n}, \varphi)$  は以下の表示を持つ.

$$\mathcal{A}(D_{A_n}) = \{a_1, \dots, a_{n+1}, b_1, \dots, b_n, c_1, \dots, c_n, d, e\},$$

$$\mathcal{R}(D_{A_n}) = \left\{ \begin{array}{l} 2a_{i+1} - a_i = b_i, 2b_i - a_{i+1} = c_i, 2c_j - b_j = c_{j+1}, \\ 2c_n - b_n = a_{n+1}, a_1 = c_1 = d, d = e \\ \text{for } i \in \{1, \dots, n+1\}, j \in \{1, \dots, n\} \end{array} \right\},$$

$$\begin{aligned} \text{Col}_{R_3}(D_{A_n}, \varphi) &\cong \langle \mathcal{A}(D_{A_n}) \mid \mathcal{R}(D_{A_n}) \rangle_{R_3} \\ &\cong \langle a_1, \dots, a_{n+1}, c_1, \dots, c_n \mid a_1 = c_1, \dots, a_n = c_n \rangle_{R_3} \\ &\cong \langle a_1, \dots, a_{n+1} \rangle_{R_3} \end{aligned}$$

より,  $\dim \text{Col}_{R_3}(D_{A_n}, \varphi) = n+1$ . したがって,  $u(A_n) \geq n$ . 一方, 図 15 の点線の円周内の  $n$  交点で交差交換すると自明なハンドル体結び目に変形できるので  $u(A_n) \leq n$ . よって,  $u(A_n) = n$ . □

## 参考文献

- [1] W. E. Clark, M. Elhamdadi, M. Saito and T. Yeatman, *Quandle colorings of knots and applications*, preprint, arXiv:1312.3307.

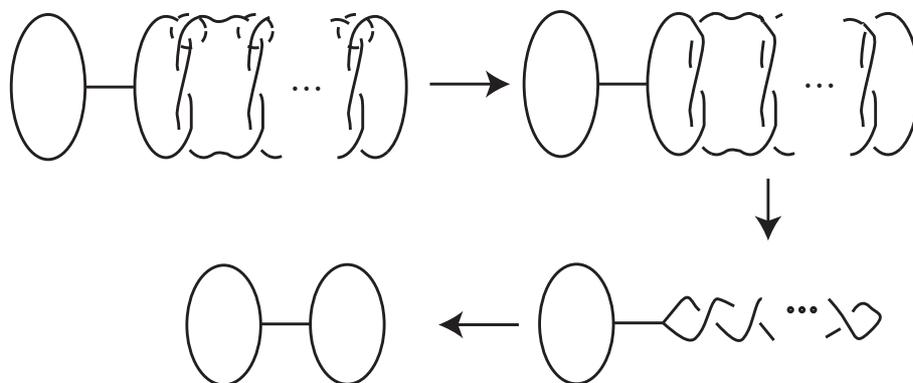


图 15:

- [2] A. Ishii, *Moves and invariants for knotted handlebodies*, *Algebr. Geom. Topol.* **8** (2008), 1403–1418.
- [3] A. Ishii and M. Iwakiri, *Quandle cocycle invariants for spatial graphs and knotted handlebodies*, *Canad. J. Math.* **64** (2012), 102–122.
- [4] A. Ishii, M. Iwakiri, Y. Jang and K. Oshiro, *A  $G$ -family of quandles and handlebody-knots*, to appear in *Illinois J. Math.*
- [5] A. Ishii, K. Kishimoto and M. Ozawa, *Knotted handle decomposing spheres for handlebody-knots*, preprint, arXiv:1211.4458.
- [6] D. Joyce, *A classifying invariant of knots, the knot quandle*, *J. Pure Appl. Alg.* **23** (1982), 37–65.
- [7] S. V. Matveev, *Distributive groupoids in knot theory*, *Mat. Sb. (N.S.)* **119(161)** (1982), 78–88.
- [8] Y. Nakanishi, *A note on unknotting number*, *Math. Sem. Notes, Kobe Univ.*, **9** (1981), 99–108.
- [9] R. Nikkuni, M. Ozawa, K. Taniyama, Y. Tsutsumi, *Newly found forbidden graphs for trivializability*, *J. Knot Theory Ramifications* **14** (2005), 523–538.
- [10] J. Przytycki, *3-coloring and other elementary invariants of knots*, *Banach Center Publ.*, **42** (1998), 275–295