

Triple chords and strong $(1, 2)$ homotopy

伊藤 昇 (早稲田大学高等研究所)

瀧村 祐介 (学習院中等科)

本稿は「結び目の数学 VII」の報告集の一部として書かれたものです。オーガナイザーである東京女子大学の大山淑之先生、新國亮先生に深く感謝致します。

1 必要な定義

- 球面曲線を、球面上の結び目射影図の交点の上下を明示しないもの、として定義する。球面曲線の向きは指定されていないものとする。
- コード図とは円周上に置かれた偶数個の点であり、それぞれ2つずつペアになったもののことである。通常、ペアはコードで結ばれる。
- 球面曲線 P のコード図とは、 P の交点の逆像をペアにしたコード図 CD_P のことである。球面曲線 P に対して CD_P は up to homeomorphism で一意に定まる。(曲線に向きが入っていないため、コード図の鏡像も同一視している。)
- triple chord を、コード図のうちで $\otimes$ であるもの、として定義する。
- RI、RII、strong RII、weak RII とは、それぞれライデマイスター移動の一種で、図 1 で定義される球面曲線の局所変形 (局所的な円盤の取り替え) である。今、球面曲線として成分数 1 のみのものを考えているので、RII は strong RII か weak RII のいずれかである。
- P^r を球面曲線 P の 1 辺形、2 辺形を RI と RII で減らし続けて、ひとつもなくなるようにした球面曲線、として定義する。減らし方によらず、一意的に定まることが [Khovanov1997] (cf. [伊藤・瀧村 2013]、[伊藤・瀧村 2014]) で知られている。

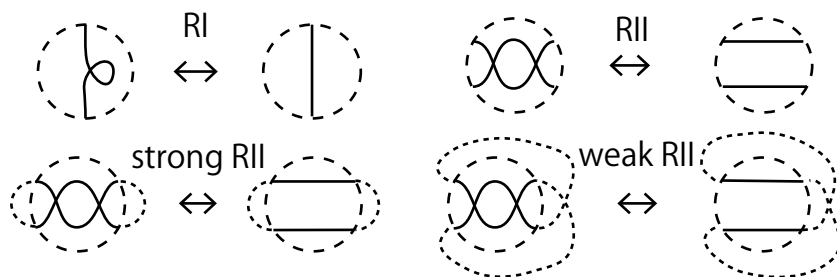


図 1 RI、RII、strong RII、weak RII。点線は取り替える円盤外での球面曲線のつながり具合を示す。

2 問題

球面曲線のコード図が $\otimes$ を含むか含まないかの必要十分条件を決定せよ。

3 背景

[坂本・谷山 2013] (implicit には [谷山 1989]) においては $\otimes$ 、 $\oplus$ について、上記のような問題が解かれている。オリジナルの結果は、平面曲線において、より強い形 (4つないし、3つの条件がすべて等しいという形) で解かれているのだが、ここでは [坂本・谷山 2013, Theorem 3.1, Theorem 3.2] の一部を抜き出し、球面曲線の定理として読み替えて紹介する。是非、原著を参照されたい。

定理 1 ([坂本・谷山 2013], [谷山 1989]) P を球面曲線とする。

P のコード図が $\otimes$ を含まない $\Leftrightarrow P$ は単純閉曲線から RI の繰り返して得られる。

P のコード図が $\oplus$ を含まない $\Leftrightarrow P$ は $\{U, T, P_i (i \geq 1)\}$ (図 2) の要素からなる連結和である。

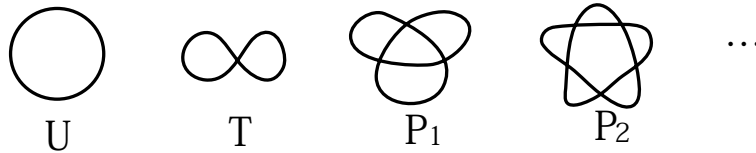


図 2 球面曲線の列。

4 方針

上記に関しては、まとめると先行研究とともに次のような (観察による) 見込みが考えられた。ここでは単純閉曲線を $\bigcirc$ で表すことを許すとする。

P は $\otimes$ を持たない $\Rightarrow P$ は $\bigcirc$ から RI で得られる [坂本・谷山 2013], [谷山 1989]。

P は $\oplus$ を持たない $\Rightarrow P$ は $\bigcirc$ から RI と weak RII で得られる [坂本・谷山 2013], [谷山 1989]。

P は $\otimes$ を持たない $\stackrel{?}{\Rightarrow} P$ は $\bigcirc$ から RI と strong RII で得られる (のではないだろうか) ?

今回、上記の 3 行目が条件付きの範囲では正しいことがわかった。尚、以下で用いる「交点増加列」という言葉は「空」の場合も含むことにする。

5 主結果

定理 2 球面曲線 P のコード図 CD_P が triple chord $\otimes$ を部分コード図として含まず、かつ P^r が prime または単純閉曲線ならば、 P は単純閉曲線から RI と strong RII による有限の交点増加列で得られる。

系 1 球面曲線 P が、1 辺形も 2 辺形も持たない prime な球面曲線のコード図が $\otimes$ を含まない、もしくは P が単純閉曲線ならば、 P は単純閉曲線から RI と strong RII による有限の交点増加列で得られる。

定理 2 は次の定理 3 により、直ちに導かれる。

定理 3 1 辺形も 2 辺形も持たない prime で非自明な球面曲線は、必ず $\otimes$ を持つ。

講演では定理 3 の証明を詳しく説明した。尚、論文 [伊藤・瀧村, accepted] には証明を完全に記載している。

参考文献

- [伊藤・瀧村 2013] N. Ito and Y. Takimura, (1, 2) and weak (1, 3) homotopies on knot projections, *J. Knot Theory Ramifications* **22** (2013), 1350085, 14pp.
- [伊藤・瀧村 2014] N. Ito and Y. Takimura, Addendum: (1, 2) and weak (1, 3) homotopies on knot projections, *J. Knot Theory Ramifications* **23** (2014), 1491001, 2pp.
- [伊藤・瀧村, accepted] N. Ito and Y. Takimura, Triple chords and strong (1, 2) homotopy, to appear in *J. Math. Soc. Japan*.
- [Khovanov1997] M. Khovanov, Doodle groups, *Trans. Amer. Math. Soc.* **349** (1997), 2297–2315.
- [坂本・谷山 2013] M. Sakamoto and K. Taniyama, Plane curves in an immersed graph in $\mathbb{R}^2$, *J. Knot Theory Ramifications* **22** (2013), 1350003, 10pp.
- [谷山 1989] K. Taniyama, A partial order of knots, *Tokyo J. Math.* **12** (1989), 205–229.