

Turk's head knot $THK(4, n)$ の r 彩色数について

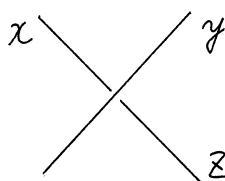
池田 みずほ (山形大学大学院理工学研究科 博士前期課程 2 年)

概要

Pedro Lopes と Joao Matias は 2010 年に Turk's head knot $THK(3, n)$ の r 彩色数は r と n によって決定付けられることを示した. 今回は Turk's head knot $THK(4, n)$ の r 彩色数について得られた結果を報告する.

1 準備

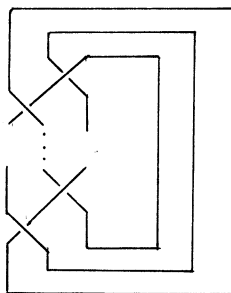
定義 1. $1 \neq r \in \mathbb{N}$. 以下の図のように x, y, z とおく. 絡み目の各交点で $2y \equiv x + z \pmod{r}$ を満たすように x, y, z に $0, 1, \dots, r-1$ の整数を対応させることを r 彩色という. 全ての交点で $x = y = z$ となるような自明な彩色も考える. また, 絡み目が非自明な彩色をもつとき, その絡み目は r 彩色可能であるという.



定義 2. 絡み目の r 彩色における配色の総数を r 彩色数という.

2 Turk's head knot $THK(3, n)$

定義 3. $n \in \mathbb{N}$. Braid closure $[(\sigma_2 \sigma_1^{-1})^n]$ を Turk's head knot $THK(3, n)$ とする.



定理.(P.Lopes, J.Matias, [1])

Turk's head knot $THK(3, n)$ の r 彩色数は以下の通りである.

$$\begin{cases} r(u_{n-1}, r)^2 & (n : odd) \\ r(5u_{n-1}, r)(u_{n-1}, r) & (n : even) \end{cases}$$

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+2} - \left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n+2} + \left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right]$$

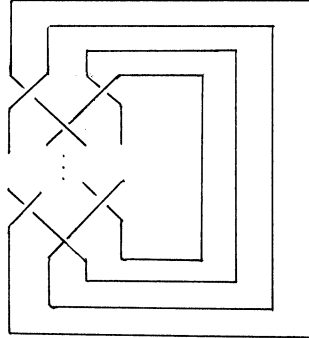
注意 1. u_n の漸化式と初期値は以下のようになるため, 最大公約数は整数になる.

$$u_{n+4} = 3u_{n+2} - u_n$$

$$\begin{cases} u_1 = 1 & , & u_3 = 3 \\ u_0 = 1 & , & u_2 = 4 \end{cases}$$

3 Turk's head knot $THK(4, n)$

定義 4. $n \in \mathbb{N}$. Braid closure $[(\sigma_1 \sigma_3 \sigma_2^{-1})^n]$ を Turk's head knot $THK(4, n)$ とする.



主定理. Turk's head knot $THK(4, n)$ の r 彩色数は以下の通りである.

$$\begin{cases} r(s_n, r)^2 & (n : odd \text{ かつ } (n, r) \neq r) \\ r^2(s_n, r)^2 & (n : odd \text{ かつ } (n, r) = r) \\ r(3t_n, r)(t_n, r) & (n : even \text{ かつ } (n, r) \neq r) \\ r^2(3t_n, r)(t_n, r) & (n : even \text{ かつ } (n, r) = r) \end{cases}$$

$$s_n = \frac{\sqrt{2}}{2} \left[\left(\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}} \right)^n - \left(\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}} \right)^n \right]$$

$$t_n = \frac{1}{2\sqrt{3}} \left[\left(\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}} \right)^n - \left(\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}} \right)^n \right]$$

注意 2. s_n, t_n の漸化式と初期値は以下のようになるため, 最大公約数は整数になる.

$$\begin{aligned} s_{n+4} &= 4s_{n+2} - s_n & , & & s_1 &= 1 & , & & s_3 &= 5 \\ t_{n+4} &= 4t_{n+2} - t_n & , & & t_2 &= 1 & , & & t_4 &= 4 \end{aligned}$$

系. Turk's head knot $THK(4, n)$ が r 彩色可能であるための必要十分条件は, 以下のいずれかの条件を満たすことである.

- $(n, r) = r$
- $(s_n, r) \neq 1 \quad (n : \text{odd})$
- $(3t_n, r) \neq 1 \quad (n : \text{even})$

謝辞

講演後, 様々な助言をして頂いた名古屋工業大学の平澤美可三先生に深く感謝致します.

参考文献

- [1] P.Lopes, J.Matias, *Minimum Number of Colors: the Turk's Head Knots Case Study*, arXiv:1002.4722