

Rectangular Seifert circles and arcs system

林忠一郎, 林美和との共同研究
日本女子大学 理学部数物科学科 学術研究員
安藤龍郎 (ANDO, Tatsuo) *

概要

平面上の oriented link diagram の各交差点において, 向きが繋がるように繋ぎかえる smoothing 操作を行うと Seifert circles を得る. 交差点の代わりに arc を配置して Seifert circles を繋ぐと, Seifert circles and arcs system (SCAS) を得る. 本研究では, SCAS を平面の ambient isotopy によって, 各 Seifert circle を縦線 2 本と横線 2 本から成る長方形型 circle に, 各 arc を縦線 1 本に変形できることを証明した. 更に, link diagram D を rectangular diagram で表したときに必要な縦線の本数を D の交差点の数 $c(D)$ の 1 次式で評価した.

1 導入

まず, rectangular diagram の定義と既に知られている定理を述べる.

定義 1 (rectangular diagram). 次の 3 つの条件を満たす平面 $\mathbb{R}^2$ 上の link diagram のことを **rectangular diagram** という:

- (条件 1) その diagram は有限本の縦線と横線から成る
- (条件 2) 同一直線上に 2 本以上の縦線 (横線) はない
- (条件 3) 各交差点で縦線は横線の上を通る

Rectangular diagram は, Dynnikov によって [5, 6] で定義されたが, 本質的には Cromwell によって [4] で導入された. また, 交差点の上下を気にせず, 縦線と横線のみから成る link diagram は Lyon によって [8] で研究されている.

例 2. 図 1 は Hopf link を, 図 2 は trefoil knot をそれぞれ rectangular diagram で表したものの 1 つである. また, 図 3 は直線 l 上に横線が 2 本あるため, 定義 1 の (条件 2) を満たさない. よって, 図 3 は rectangular diagram ではない.

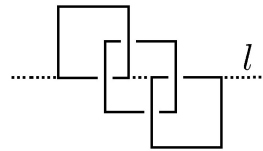
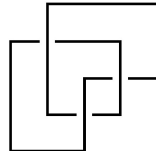
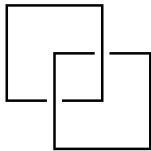


図 1: rectangular diagram

図 2: rectangular diagram

図 3: rect. diag. でないもの

*e-mail : tando@fc.jwu.ac.jp

定理 3 (Cromwell [4]). 任意の link は rectangular diagram を持つ.

定理 4 (Dynnikov [5, 6]). Trivial knot を表す rectangular diagram は, 縦線の本数を増やさない Cromwell 変形を有限回上手く適用することで, 縦線 2 本と横線 2 本から成る長方形型の rectangular diagram に変形することができる.

定理 5 (Dynnikov [5, 6]). Split link を表す rectangular diagram は, 縦線の本数を増やさない Cromwell 変形を有限回上手く適用することで, disconnected な rectangular diagram に変形することができる.

注意 6. (1) **Cromwell 変形**とは, rectangular diagram 上の基本変形のことで, 縦線の本数を「増やすもの」,「減らすもの」,「変えないもの」の 3 種類がある. 詳しくは, [5] の stabilization and destabilization moves, interchanging (p.34-35), rotating (p.40) または [6] の Theorem 2.5. (p.1100) を参照せよ.

(2) 定理 4, 5 は, 縦線の本数を増やさない変形のみで, trivial knot の rectangular diagram をほどこいたり, split link の rectangular diagram を disconnected にしたりできることを主張している.

Henrich と Kauffman は Dynnikov の結果を応用して, [7] で trivial knot をほどくのに必要な Reidemeister moves の回数の上界を求めた. しかし, [7] には複数誤りがあった. これに対して, [1] では誤りの一部を修正した.

Henrich と Kauffman は [7] の Lemma 2 で, 「Morse の位置にある oriented link diagram D は, 平面の ambient isotopy で縦線の本数が $2b(D) + c(D)$ 以下の rectangular diagram に変形できる」ことを証明した. ここで, $b(D)$ は D の maxima の数を表し, $c(D)$ は D の交差点の数を表す. この $b(D)$ は, 平面の ambient isotopy で変わりうるものである. また, 平面の ambient isotopy に拘らなければ, Bae と Park による次の結果がある. 「Prime link の link diagram D は, 空間の ambient isotopy で縦線の本数が $c(D) + 2$ 以下の rectangular diagram に変形できる」 ([3]).

本研究では, maxima の代わりに Seifert circles の個数 $S(D)$ を用いて縦線の本数を評価することができた. さらに, 交差点の数 $c(D)$ のみで評価することもできた. それらの結果を紹介する前に, 用語の準備をする.

定義 7 (smoothing). **Smoothing** とは, 与えられた oriented link diagram の交差点を図 4 のように置き換える操作のことである. 交差点のところで link の辺たちが繋ぎ変わる. ただし, その際, 交差点の上下に関係無く, 辺たちの向きが矛盾無く繋がるようにする.



図 4: smoothing 操作

定義 8 (Seifert circles). Oriented link diagram のすべての交差点に対して, smoothing を行うと有限個の oriented circles が残る. これらの circles のことを **Seifert circles** と呼ぶ (図 5).

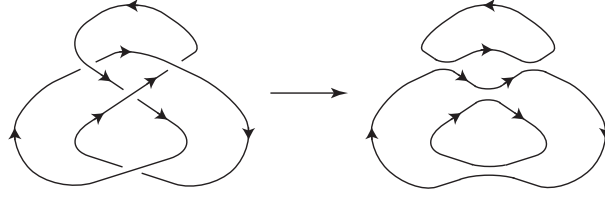


図 5: Seifert circles

定義 9 (nugatory). Link diagram の交差点が **nugatory** であるとは, 平面上の circle で link diagram とその交差点の 1 点だけで交差的に交わるものが存在するときをいう (図 6).

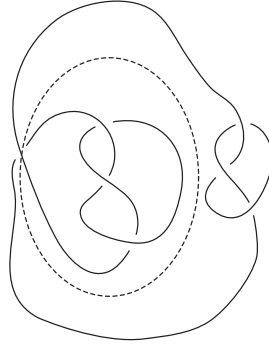


図 6: nugatory crossing を持つ knot diagram

次の定理 10, 11 は今回の結果である.

定理 10. D を oriented link diagram とし, $c(D)$ を D の交差点の数, $S(D)$ を D に smoothing を行うことで得られる Seifert circles の個数とする. このとき, D は平面の ambient isotopy で縦線の本数が $2S(D) + c(D)$ 以下の rectangular diagram に変形できる. 特に, D が nugatory crossing をもたない link diagram で, $c(D) \geq 1$ のとき, D は平面の ambient isotopy で縦線の本数が $2S(D) + c(D) - 2$ 以下の rectangular diagram に変形できる.

縦線の本数を, 交差点の数だけで評価したのが次の定理である.

定理 11. D を connected link diagram とし, $c(D)$ を D の交差点の数とする. このとき, D は平面の ambient isotopy で縦線の本数が $2c(D) - w(D) + 2$ 以下の rectangular diagram に変形できる. ただし, $w(D)$ は D によって定まる非負整数で, 詳しくは後で述べる.

我々は, 定理 10, 11 を証明するために, 以下に述べる circles and arcs system について考えた. なお, 定理 13 も今回の結果である.

定義 12 (circles and arcs system (CAS)). 平面上の有限個の circles の disjoint union C と有限個の arcs の disjoint union A の和集合 $C \cup A$ で, $C \cap A = \partial A$ を満たすものを **circles and arcs system (CAS)** という. ただし, ∂A は arcs の端点すべてがなす集合である.

定理 13. 任意の CAS は, 平面の ambient isotopy で次のように変形できる:

- (1) 各 circle は「縦線 2 本と横線 2 本から成る長方形型 circle」
- (2) 異なる circles を繋ぐ arc は「縦線 1 本」
- (3) ある circle に両端点を持つ arc は「縦線 1 本」または「縦線 2 本と横線 1 本から成り、同じ側に 2 回折れ曲がる折れ線」

定理 13 の証明は [2] を参照.

定義 14 (rectangular circles and arcs system (RCAS)). 定理 13 において, 変形後の CAS を **rectangular circles and arcs system (RCAS)** という.

例 15. 図 7 の CAS を定理 13 の形に変形したのが, 図 8 の RCAS である.

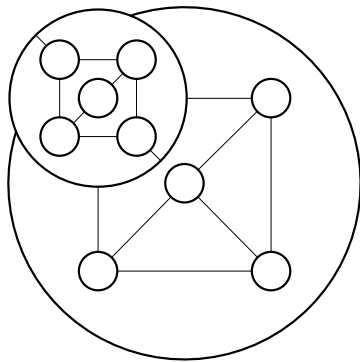


図 7: circles and arcs system

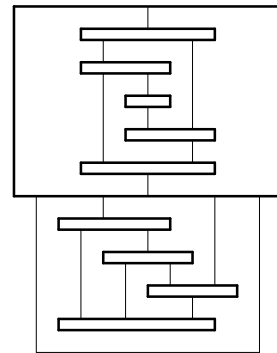


図 8: rectangular circles and arcs system

CAS の特別な場合として, 次の Seifert circles and arcs system がある.

定義 16 (Seifert circles and arcs system (SCAS)). 平面上の oriented link diagram の各交差点において, smoothing を行くと Seifert circles を得る. このとき, 図 9 (1) のように, 「交差点の代わりに arc を配置して Seifert circles を繋ぐ」ことで得られる図を **Seifert circles and arcs system (SCAS)** と呼ぶ.

例 17. 図 9 (2) は, 8 の字結び目の oriented knot diagram (図 5) から得られる SCAS を表す.

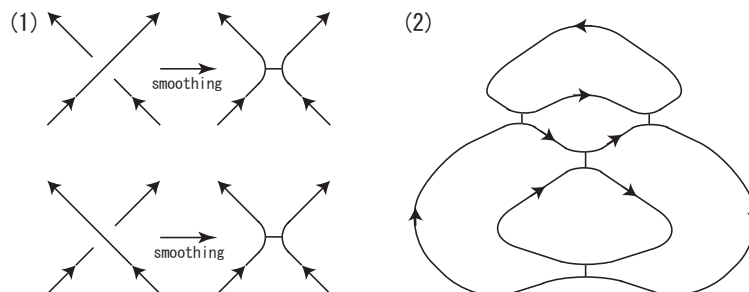


図 9: Seifert circles and arcs system

注意 18. SCAS において, 1 本の arc の 2 つの端点が, 同一の Seifert circle 上に存在することはない. なぜならば, 存在すると仮定すると, 元の link diagram の向きに関して矛盾が生じるからである. 図 10 は, arc の端点 b のところで矛盾しないように交差点のところの辺の向きを決めると, a のところで向きに関して矛盾が生じることを示している. よって, どの arc も異なる Seifert circles を繋ぐ.

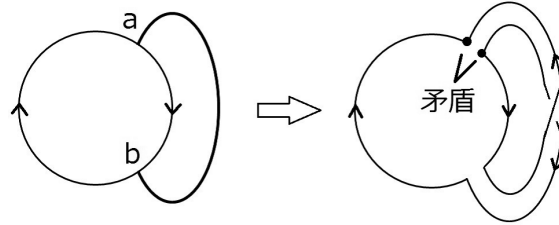


図 10: 注意 18

注意 18 より, SCAS に対して定理 13 を用いると次が得られる.

定理 19 (定理 13 の系). 任意の SCAS は, 平面の ambient isotopy で次のように変形できる:

- (1) 各 Seifert circle は「縦線 2 本と横線 2 本から成る長方形型 circle」
- (2) 各 arc は「縦線 1 本」

定義 20 (rectangular Seifert circles and arcs system (RSCAS)). 定理 19 において, 変形後の SCAS を **rectangular Seifert circles and arcs system (RSCAS)** と呼ぶ.

2 定理 10 の証明方針

この節では, 定理 10 の証明方針を説明する. まず用語の準備をする.

定義 21 (straight merge (s-merge)). R を rectangular diagram, e を交差点を持たない R の辺とする. e と繋がる 2 本の辺が互いに e の異なる側にあるとき, それら 3 つの辺を 1 つの辺に融合する変形のことを **straight merge (s-merge)** という (図 11).

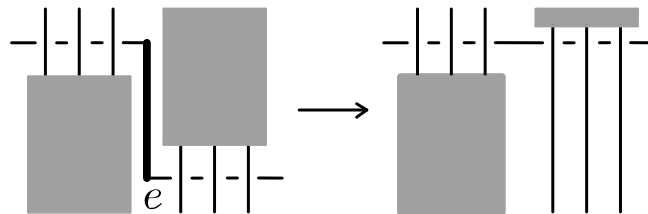


図 11: straight merge

注意 22. s-merge を一回行くと, rectangular diagram の縦線と横線の本数は 1 本ずつ減る. また, s-merge は link diagram の ambient isotopy クラスを変えない変形である.

(定理 10 の証明の概略) . Smoothing と定理 19 を用いて, 与えられた oriented link diagram D から RSCAS をつくる. そして, RSCAS から rectangular diagram に変換することを考える. 以下, 変換方法の手順を述べる.

最初に, RSCAS の各 arc を交差点に置き戻す. このとき, 交差点の上下により図 12 の 2 通りが考えられる.

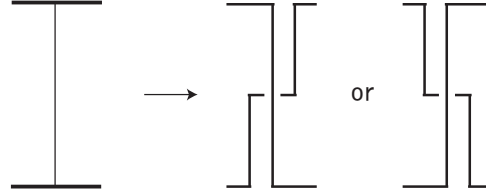


図 12: arc から交差点への置き戻し

次に, 各交差点付近に対して s-merge を行い, 縦線の本数を減らす. 交差点の上下に依らず, 各交差点付近に対して二回 s-merge を行えるため, 2 本縦線が減る (図 13). よって, 1 つの交差点を実現するために必要な縦線は 1 本である.

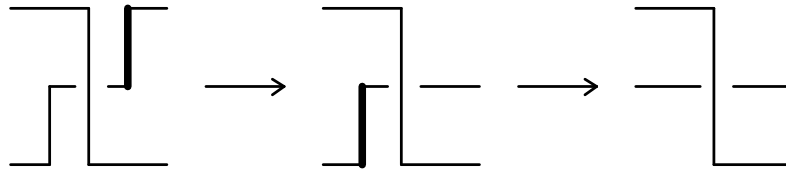


図 13: straight merge

また, 各 Seifert circle は長方形型 circle となっているため, Seifert circle 1 つにつき, 縦線は 2 本ある. したがって, D は, 縦線の本数が「Seifert circles の個数の 2 倍に交差点の数を加えた $2S(D) + c(D)$ 」以下の rectangular diagram に変形できる.

「nugatory crossing を持たず, $c(D) \geq 1$ 」の場合の証明は [2] を参照. □

3 定理 11 の証明方針

この節では, 定理 11 の証明方針を説明する. まず用語の準備と補題を紹介する.

定義 23 (monadic circle and arcs system (MCAS)). CAS において, circle の個数が 1 つのものを **monadic circle and arcs system (MCAS)** という.

定義 24 (undirected smoothing). Smoothing において, link diagram の向きを考慮しないものを **undirected smoothing** という.

補題 25. Connected link diagram の各交差点に対して, 適当に undirected smoothing を行い, 交差点を arc に置き換えると, MCAS が得られる. さらに, MCAS に定理 13 を用いると, RCAS に変形できる. この変形後の MCAS を **rectangular monadic circle and arcs system (RMCAS)** という.

例 26. 図 14（中央）は 8 の字結び目から得られる MCAS を、図 14（右）は 8 の字結び目から得られる RMCAS をそれぞれ表す。

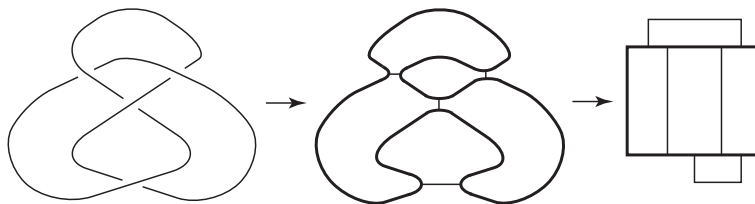


図 14: MCAS と RMCAS

（補題 25 の証明）．与えられた link diagram D の各交差点に対して，undirected smoothing を行い $CAS S = C \cup A$ を作る．このとき， D は connected であるから， S も connected である． C が唯一つの circle からなる集合のときは補題の形となるので，以下， C は 2 つ以上の circles を含むとする．異なる 2 つの circles を繋ぐ A の arc に対して，もう一方の undirected smoothing を考えると，circle の個数を 1 つ減らすことができる（図 15）． S は connected であるため，この作業を繰り返し行えば circle の個数は 1 となり，MCAS が得られる． $\square$

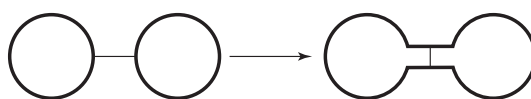


図 15: 補題 25 の証明

（定理 11 の証明の概略）．与えられた connected link diagram D から RMCAS をつくる．そして，RMCAS から rectangular diagram に変換することを考える．以下，変換方法の手順を述べる．

最初に，RMCAS の各 arc を交差点に置き戻す．このとき，交差点の上下により，(a) arc が「縦線 1 本」の場合は図 16（上）の 2 通り，(b) arc が「縦線 2 本と横線 1 本から成り，同じ側に 2 回折れ曲がる折れ線」の場合は図 16（下）の 2 通りが考えられる．

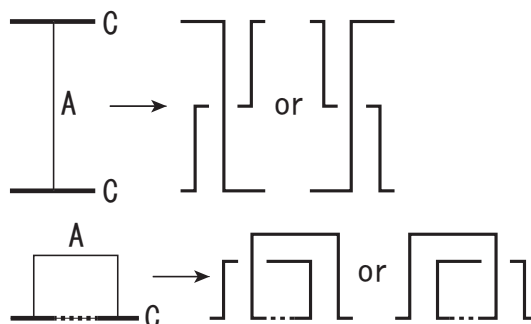


図 16: arc から交差点への置き戻し

次に、各交差点付近に対して s-merge を行い、縦線の本数を減らす. (a), (b) ともに、交差点の上下に依らず各交差点付近に対して二回 s-merge を行えるため、2 本縦線が減る. よって、1 つの交差点を実現するために必要な縦線は、(a) のとき 1 本、(b) のとき 2 本である (図 17) .

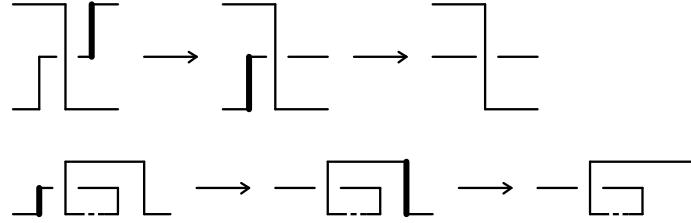


図 17: straight merge

また、 D を RMCAS に変換したときの「(a) の場合の arc の本数の最大値」を $w(D)$ とする. 以上より、

- 1 つの交差点を実現するために必要な縦線は高々 2 本 ($2c(D)$)
- ただし、arc が (a) のときは縦線 1 本で済む ($-w(D)$)
- 唯一つの circle は長方形型 circle (+2)

であるから、 D は、縦線の本数が $2c(D) - w(D) + 2$ 以下の rectangular diagram に変形できる. $\square$

参考文献

- [1] T. Ando, C. Hayashi and Y. Nishikawa, *Realizing Exterior Cromwell moves on rectangular diagrams by Reidemeister moves*, Journal of Knot Theory and Its Ramifications, Vol 23, No. 5 (2014) 1450023 (23 pages).
- [2] T. Ando, C. Hayashi and M. Hayashi, *Rectangular Seifert circles and arcs system*, Journal of Knot Theory and Its Ramifications, Vol 23, No. 8 (2014) 1450041 (23 pages).
- [3] Y. Bae and C.Y. Park, *An upper bound of arc index of links*, Math. Proc. Cambridge Phil. Soc. **129** (2000), 491–500.
- [4] P.R. Cromwell, *Embedding knots and links in an open book I: Basic properties*, Topology and its Applications **64** (1995), 37–58.
- [5] I.A. Dynnikov, *Arc-presentations of links: Monotone simplification*, Fundamenta Mathematicae **190** (2006), 29–76.
- [6] I.A. Dynnikov, *Recognition algorithms in knot theory*, Uspekhi Mat. Nauk **58** (2003), 45–92; translation in Russian Math. Surveys **58** (2003), 1093–1139.
- [7] A. Henrich and L. Kauffman, *Unknotting Unknots*, preprint (arXiv:1006.4176v4 [math.GT] 4Nov2011).
- [8] H. C. Lyon, *Torus knots in the complements of links and surfaces*, Michigan Math. J. Vol 27, No. 1 (1980), 39–46.