

Finite type invariant と quandle shadow cocycle invariant との関係

阿部 翠空星 (埼玉大学理工学研究科 博士2年)

概要

1 序論

カンドルとは、ある代数系であり、例えば群の共役類があげられる。有限カンドル X に対して、カンドル(コ)ホモロジーが J. S. Carter, D. Jelsovsky, S. Kamada, L. Langford, M. Saito 氏らによって導入された [CJKLS]。さらに、2次または3次のコサイクルが与えられたときに絡み目のカンドル (シャドウ) コサイクル不変量が定義されている [CJKLS], [CKS]。今回は dihedral quandle と [M2] で定義された Mochizuki 3-cocycle を用いた quandle shadow cocycle invariant を考える。この不変量はカンドルを用いた不変量である。

一方で、特異結び目の不変量 v が $d+1$ 個の特異点を持った特異結び目 K^{d+1} に対して、 $v(K^{d+1}) = 0$ を満たすとき d 次の有限型不変量という量子不変量がある [G1, G2, V]。有限型不変量より条件を弱めた quasi finite type invariant を定義し前述の quandle shadow cocycle invariant との関係を導いた。

さらに、大きな結果として [HN] の結果からレンズ空間などの絡み目 L を double branched covering してえられる3次元多様体の新しい有限型不変量を導いた。これは大槻型有限型不変量とは全く異なるものである。

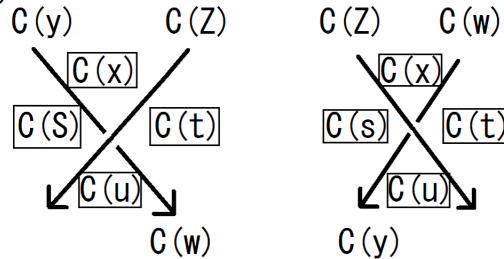
本報告書ではページの都合上2橋絡み目とレンズ空間のみ例を掲載する。

2 深謝

東京女子大学現代教養学部 数理科学科 数学専攻教授大山 淑之先生・同学科准教授新國 亮先生には研究集会「結び目の数学 VII」の発表の機会を頂いた。ここに感謝の意を表する。

3 quandle shadow cocycle invariant と finite type invariant の復習

m を奇数とし、 $R_m = \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ とする。 $x, y \in R_m$ に対して $x * y = 2y - x$ と定義する。このカンドルを *dihedral quandle* という。 $D : \text{Link の図式}, \sum(D) : \text{Link の図式とその補領域}, C : \sum(D) \rightarrow R_m$; R_m -shadow coloring とは以下の正負の交点に R_m の元を対応させる写像である。



ただし、 $C(w) = C(y) * C(z)$, $C(s) = C(x) * C(y)$, $C(t) = C(x) * C(z)$ and $C(u) = C(s) * C(w) = C(t) * C(y)$ を満たす。
[M2] で定義された Mochizuki 3-cocycle $\theta_p : (R_p)^3 \rightarrow \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ (p :odd prime)

$$\theta_p(x, y, z) = (x - y) \frac{(2z - y)^p + y^p - 2z^p}{p}$$

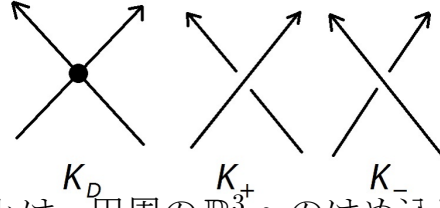
を用いて各交点 τ に対して、左上図の正の交点には $W(\tau, C) = \theta_p(x, y, z)$ 、右上図の負の交点には $W(\tau, C) = \theta_p(x, y, z)^{-1}$ と重みをつける。

Definition 3.1 (CKS). *quandle shadow cocycle invariant* とは以下の式で定義される。

$$\Phi_{\theta_p}(L) = \sum_C \prod_{\tau} W_{\theta_p}(\tau; C) \in \mathbb{Z}[\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}] \cong \mathbb{Z}[t]/(t^p - 1)$$

次に finite type invariant の復習をする。アーベル群 A に値をとる結び目の不変量 v が与えられると、次の式で特異結び目の不変量に拡張される。

$$v(K_D) = v(K_+) - v(K_-)$$



ここで特異結び目とは、円周の $\mathbb{R}^3$ へのはめ込みで、特異点は2重点のみのものである。

Definition 3.2 ([G1, G2, V]). 結び目の不変量 v が $d+1$ 個の2重点を持つ任意の特異結び目 K^{d+1} について $v(K^{d+1}) = 0$ をみたすとき、 v を次数 d の *finite type invariant* という。

4 quasi finite type invariant

finite type invariant には次の2つの性質がある。 $\mathcal{K}_d = \langle d \text{ 次の特異結び目} \rangle_{\mathbb{C}}$ とし、 $\mathcal{A}(S^1)^{(d)}$ を次数 d のコード図がはる $\mathbb{C}$ 上有限次元ベクトル空間とする。

- (i) 空集合でないベクトル空間の降鎖列 $\mathcal{K}_0 \supset \mathcal{K}_1 \supset \mathcal{K}_2 \supset \cdots \supset \mathcal{K}_d \supset \mathcal{K}_{d+1} \supset \cdots$ が存在する。
- (ii) 全射線型写像 $\varphi : \mathcal{A}(S^1)^{(d)} / FI \twoheadrightarrow \mathcal{K}_d / \mathcal{K}_{d+1}$ が存在する。

この2つの性質を弱めたものを以下のように定義する。

Definition 4.1. ある絡み目のクラスが張る $\mathbb{C}$ 上のベクトル空間の降鎖列 $\mathcal{K} = \mathcal{K}_0 \supset \mathcal{K}_1 \supset \mathcal{K}_2 \supset \cdots \supset \mathcal{K}_d \supset \mathcal{K}_{d+1} \supset \cdots$ が存在し $\mathfrak{A}(d)$ を $\mathcal{K}_d$ を定義する条件とする。 $\mathcal{K}$ の不変量線型写像 $v_d : \mathcal{K} \rightarrow A$ が quasi finite type invariant であるとは以下の性質をみたす。

- (i) v_d は $\mathfrak{A}(d+1)$ を用いて $v_d|_{\mathcal{K}_{d+1}} = 0$ となる。
- (ii) 全射線型写像 $\mathcal{A}^{(d)} \twoheadrightarrow \mathcal{K}_d / \mathcal{K}_{d+1}$ をみたす $\mathbb{C}$ 上ベクトル空間 $\mathcal{A}^{(d)}$ が存在する。

Remark 4.2. 条件 (i) は次のようなつまらない例を除くために付加する条件である。

Example 4.3. ある絡み目の $\mathbb{C}$ 上ベクトル空間の降鎖列 $\mathcal{K} = \mathcal{K}_0 \supset \mathcal{K}_1 \supset \mathcal{K}_2 \supset \cdots \supset \mathcal{K}_d \supset \mathcal{K}_{d+1} \supset \cdots$ に対して unknotting number を $u(K)$ とする。このとき、 $v_0(K) = v_1(K) = \cdots = v_d(K) = u(K)$, $v_i(K) = 0 (i > d)$ は条件 (i) がない場合 d 次 quasi finite type invariant となる。

Example 4.4. $S(l, n)$:2-bridge link. Putting an odd integer $s < l$ such that $sn \equiv 1 \pmod{l}$. このとき $S(l, n)$ のカンドルシャドウ コサイクル不変量 $\Phi_{\theta_p}(S(l, n))$ は次のように計算されている [I]。If l is divisible by p (p :odd prime integer)

$$\Phi_{\theta_p}(S(l, n)) = p^2 \sum_{i=0}^{p-1} t^{\frac{-ls}{p}i^2} \in \mathbb{Z}[t]/(t^p - 1)$$

ここで、 p^2 は不変量の本質的部分ではないため以後 $\Phi_{\theta_p}(S(l, n)) = \sum_{i=0}^{p-1} t^{\frac{-ls}{p}i^2}$ と表記する。 $\Phi_{\theta_p}(S(l, n)) \in \mathbb{Z}[t]/(t^{p-1} + \cdots + t + 1)$ で考える。 $\Phi_{\theta_p}(S(l, n)) = a_{p,0} + a_{p,1}(t-1) + \cdots + a_{p,p-2}(t-1)^{p-2}$ と展開したとき、 $a_{p,n}$ は $(\text{mod } p)$ で考えると $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ の元で $\Phi_{\theta_p}(S(l, n))$ から一意に定まる。このとき次の $\mathbb{C}$ 上ベクトル空間の降鎖列を定義する。

$$\mathcal{K} = \mathcal{K}_0 = \mathcal{K}_1 := \langle S(l, n) \rangle_{\mathbb{C}},$$

$$\mathcal{K}_2 := \langle S(l, n) \mid \exists p \text{ s.t. } p|l, p : \text{odd prime integer} \rangle_{\mathbb{C}},$$

$$\mathcal{K}_d := \langle S(l, n) \mid \exists p \neq 3, 5, \dots, p_{d-2} \text{ s.t. } p|l \rangle_{\mathbb{C}},$$

ここで、 p_d は d 番目の奇素数をあらわす。この降鎖列に対して線型写像 v_d を以下のように定義する。

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{K} & \xrightarrow{v_d} & \mathbb{C} \\ \Psi & & \Psi \\ S(l, n) & \longmapsto & \begin{cases} a_{p_{d-1}, \frac{p_{d-1}-1}{2}} & (p_{d-1}|l) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases} \end{array}$$

Theorem 4.5. v_d は d 次 *quasi finite type invariant* である。

Proof. $S(l, n) \in \mathcal{K}_{d+1}$ とすると、 $\mathcal{K}_{d+1}$ を定義する条件から $p_{d-1} \nmid l$ なので $v_d|_{\mathcal{K}_{d+1}} = 0$ となる。次に全射な写像を次のように定義する。整数 $\mathbb{Z}$ に対して直和 $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ 全体がはる $\mathbb{C}$ 上ベクトル空間を $\langle \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \rangle_{\mathbb{C}}$ とする。

$$\begin{array}{ccc} \langle \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \rangle_{\mathbb{C}} & \longrightarrow & \mathcal{K}_d / \mathcal{K}_{d+1} \\ \Psi & & \Psi \\ \sum c_i(p, q) & \longmapsto & \overline{\sum c_i S(p, q)} \end{array}$$

□

5 いくつかの3次元多様体の有限型不変量

Definition 5.1. ある条件をみたす 3-manifold 全体がはる $\mathbb{C}$ 上のベクトル空間を $\mathcal{M}$ とする。 $\mathcal{M}$ の部分空間の降鎖列 $\mathcal{M} = \mathcal{M}_0 \supset \mathcal{M}_1 \supset \cdots \supset \mathcal{M}_d \supset \mathcal{M}_{d+1} \supset \cdots$ が存在し $\mathfrak{B}(d)$ を $\mathcal{M}_d$ を定義する条件とする。 $\mathcal{M}$ の不変量線型写像 $f_d : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{C}$ が d 次の finite type invariant であるとは以下の性質をみたす。

- (i) f_d は $\mathfrak{B}(d+1)$ を用いて $f_d|_{\mathcal{M}_{d+1}} = 0$ となる。
- (ii) 各 d について d 次の finite type invariant 全体は有限次元である。

Theorem 5.2 ([HN]). M_L を絡み目 $L \subset S^3$ の *double branched covering* とする。任意の $\phi \in H_Q^3(R_p; \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ に対して $DW_{\theta_\phi}^{\mathbb{Z}}(M_L) \doteq \Phi_{\theta_p}(L)$ をみたす $\theta_\phi \in H_{gr}^3(G; \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ が存在する。ここで、 $DW_{\theta_\phi}^{\mathbb{Z}}(M_L)$ は *Dijkgraaf-Witten* 不変量の $\mathbb{Z}$ 同変部分を表し、 $\doteq$ は “整数倍を無視して等しい” という意味である。

Example 5.3 ([DW, MOO, W]). $L(l, s)$: lens space, if l is divisible by p

$$DW_{\theta_\phi}^{\mathbb{Z}}(L(l, s)) \doteq \Phi_{\theta_p}(S(l, n)) = p^2 \sum_{i=0}^{p-1} t^{\frac{-ls}{p} i^2}.$$

ここで、 p^2 は不変量の本質的部分ではないため以後 $DW_{\theta_\phi}^{\mathbb{Z}}(L(l, s)) = \sum_{i=0}^{p-1} t^{\frac{-ls}{p} i^2}$ と表記する。 $DW_{\theta_\phi}^{\mathbb{Z}}(L(l, s)) \in \mathbb{Z}[t]/(t^{p-1} + \cdots + t + 1)$ で考える。 $DW_{\theta_\phi}^{\mathbb{Z}}(L(l, s)) = a_{p,0} + a_{p,1}(t-1) + \cdots + a_{p,p-2}(t-1)^{p-2}$ と展開したとき、 $a_{p,n}$ は $(\text{mod } p)$ で考えると $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ の元で $DW_{\theta_\phi}^{\mathbb{Z}}(L(l, s))$ から一意に定まる。このとき次の $\mathbb{C}$ 上ベクトル空間の降鎖列を定義する。

H_1 : solid torus, $\tau_i \in \mathfrak{M}_1$: Lickorish generators [L1, L2] of mapping class group on handlebody surface ∂H_1

$$\begin{aligned} \mathcal{M} &= \mathcal{M}_0 = \mathcal{M}_1 = \langle L(l, s) \rangle_{\mathbb{C}}, \\ \mathcal{M}_2 &:= \langle L(l, s) \mid \exists p \text{ s.t. } p|l, \\ L(l, s) &= H_1 \cup_{\varphi} H_1, \varphi = \underbrace{\tau_1 \circ \tau_2 \circ \cdots \circ \tau_d \circ \cdots}_{3 \text{ or more}} \rangle_{\mathbb{C}}, \\ \mathcal{M}_d &:= \langle L(l, s) \mid \exists p \neq 3, 5, \dots, p_{d-2} \text{ s.t. } p|l, \\ L(l, s) &= H_1 \cup_{\varphi} H_1, \varphi = \underbrace{\tau_1 \circ \tau_2 \circ \cdots \circ \tau_d \circ \cdots}_{d+1 \text{ or more}} \rangle_{\mathbb{C}}, \end{aligned}$$

Lemma 5.4. $\mathcal{M}_d \neq \emptyset$.

Proof. (i) $d = 2$ のとき $L(3, 2) \in \mathcal{M}_2$.

(ii) $d = k$ のとき $L(p_{k-1}, 2) \in \mathcal{M}_k$ と仮定する. $p_{k-1} \geq k + 1$ より $p_k > p_{k-1} + 1 \geq k + 2$. $\therefore L(p_k, 2) \in \mathcal{M}_{k+1}$. $\square$

この降鎖列 $\{\mathcal{M}_d\}$ に対して線型写像 f_d を以下のように定義する。

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M} & \xrightarrow{f_d} & \mathbb{C} \\ \Psi & & \Psi \\ L(l, s) & \longmapsto & \begin{cases} a_{p_{d-1}, \frac{p_{d-1}-1}{2}} & (p_{d-1} | l) \\ 0 & (otherwise) \end{cases} \end{array}$$

Theorem 5.5. f_d は d 次 *finite type invariant* である。

Proof. $L(l, s) \in \mathcal{M}_{d+1}$ とすると、 $\mathcal{M}_{d+1}$ を定義する条件から $p_{d-1} \nmid l$ なので $f_d|_{\mathcal{M}_{d+1}} = 0$ となる。次に全射な写像を次のように定義する。 $\langle \tau_1, \tau_2 \rangle_{\mathbb{C}}^{(\leq d)} = \langle \tau_1, \tau_2 \in \mathfrak{M}_1 \text{ の } d+1 \text{ 個以下の積} \rangle_{\mathbb{C}}$ と定義する。

$$\begin{array}{ccc} \langle \tau_1, \tau_2 \rangle_{\mathbb{C}}^{(\leq d)} & \longrightarrow & \mathcal{M}/\mathcal{M}_{d+1} \\ \Psi & & \Psi \\ \sum c_i \varphi_i & \longmapsto & \overline{\sum c_i H_1 \cup_{\varphi_i} H_1} \end{array}$$

$\langle \tau_1, \tau_2 \rangle_{\mathbb{C}}^{(\leq d)}$ は有限個の元が生成するベクトル空間なので有限次元である。そこから $\mathcal{M}/\mathcal{M}_{d+1}$ への全射があるので、 $\mathcal{M}/\mathcal{M}_{d+1}$ は有限次元である。「 d 次の *finite type invariant* の全体の空間」は $\mathcal{M}/\mathcal{M}_{d+1}$ の双対ベクトル空間より、有限次元になる。 $\square$

参考文献

- [CJKLS] J. S. Carter, D. Jelsovsky, S. Kamada, L. Langford, M. Saito, *Quandle cohomology and state-sum invariants of knotted curves and surfaces*, Trans. Amer. Math. Soc. **355** (2003) 3947–3989.
- [CKS] J. S. Carter, S. Kamada, M. Saito, *Geometric interpretations of quandle homology*, J. Knot Theory Ramifications **10** (2001) 345–386.
- [DW] R. Dijkgraaf, E. Witten, *Topological gauge theories and group cohomology*, Comm. Math. Phys. **129** (1990) 393–429.

- [G1] M. N. Goussarov, *A new form of the Conway-Jones polynomial of oriented links*, in Topology of manifolds and varieties, edited by O. Viro, Amer. Math. Soc., Providence (1994), 167-172.
- [G2] ———, *On n -equivalence of knots and invariants of finite degree*, in Topology of manifolds and varieties, edited by O. Viro, Amer. Math. Soc., Providence (1994), 173-192.
- [HN] E. Hatakenaka, T. Nosaka, *Some topological aspects of 4-fold symmetric quandle invariants of 3-manifolds*, Int. J. Math. **23** (2012)
- [I] M. Iwakiri, *Calculation of dihedral quandle cocycle invariants of twist span 2-bridge knots*, J. Knot Theory Ramifications. **14** (2005) 217–229.
- [L1] W. B. R. Lickorish, *A finite set of generators for the homeotopy group of a 2-manifold*, Proc. Cambridge Philos. Soc **60** (1964), 769–778.
- [L2] ———, *A finite set of generators for the homeotopy group of a 2-manifold (Corrigendum)*, Proc. Cambridge Philos. Soc **62** (1966), 679–681.
- [M1] T. Mochizuki, *Some calculations of cohomology groups of finite Alexander quandles*, J. Pure Appl. Algebra **179** (2003) 287–330.
- [M2] ———, *The 3-cocycles of the Alexander quandles $\mathbb{F}_q[T]/(T - \omega)$* , Algebraic and Geometric Topology. **5** (2005) 183–205.
- [MOO] H. Murakami, T. Ohtuki, M. Okuda, *Invariants of three-manifolds derived from linking matrices of framed links*, Osaka J. Math. **29** (1992) no. 3, 545–572.
- [V] V.A. Vassiliev, *Cohomology of knot spaces*, “Theory of symmetries and its applications” (V.I. Arnold ed.) Adv. Soviet Math. **1**, Amer. Math. Soc., Providence, RI (1990) 23–69.
- [W] M. Wakui *On Dijkgraaf-Witten invariants for 3-manifolds*, Osaka J. Math. **29** (1992) 675–696.

Science and technology studies graduate course, Saitama University, Sakura-ku, shimookubo, 255, Japan

E-mail address: s13dm001@mail.saitama-u.ac.jp