

3-COMPONENT SURFACE-LINK WITH BRAID INDEX 4 IS RIBBON

岩切 雅英 (佐賀大学大学院工学系研究所)

1. INTRODUCTOIN

surface-link とは 4 次元空間 $\mathbf{R}^4$ 内に局所平坦に埋め込まれた向き付けられた閉曲面のことであり、特に連結な場合、surface-knot という。連結成分が 2 次元球面であるような曲面絡み目を 2-link といい、連結な場合 2-knot という。2 つの surface-link F と F' が同値であるとは、 $\mathbf{R}^4$ のアンビエントアイソトピーで互いに移り合う時をいい、 $F \cong F'$ で表す。 $\mathbf{R}^4 = \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}$ とみなします。 $\mathbf{R}^4 = \mathbf{R}^3 \times \{0\}$ に含まれる surface-knot を trivial surface-knot という。trivial surface-knot の同値類は、種数ごとに一意的である。trivial 2-knot を U_0 、種数 $g(\geq 1)$ の trivial surface-knot を T_g で表す。trivial surface-knot の分離和を、trivial surface-link という。trivial 2-link から 1-ハンドル手術で得られる surface-link と同値なものを ribbon surface-link という。図 1 は、ribbon surface-link の例である。

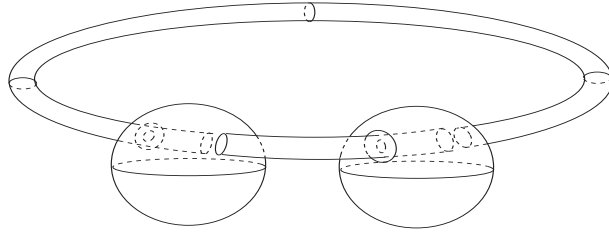


図 1. A ribbon surface-link

O. Viro([4]) により、surface braid の概念が導入され、4 次元版のアレクサンダーの定理をもたらした。すなわち、任意の surface-link はある surface braid の閉包と同値である。この定理から、任意の surface-link F に対して、ブレイド指数 $\text{Braid}(F)$ が次のように定義できる。

$$\text{Braid}(F) := \min\{\text{surface braid } S \text{ の degree} \mid F \cong (S \text{ の閉包})\}$$

(degree の定義は 2 章。) S. Kamada により、次のことが知られている ([1])。

- $\text{Braid}(F) = 1 \iff F \cong U_0$.
- $\text{Braid}(F) = 2 \iff F \cong T_g$.
- $\text{Braid}(F) = 3 \implies F$ は ribbon surface-link.
- $\text{Braid}(F) = m$ かつ F の連結成分数が $m \iff F$ は trivial 2-link.

また、 $\text{Braid}(F) = 4$ で F の連結成分数が 1, 2 の ribbon でない surface-link が存在する。(例えば、 $n \geq 3$ に対する 2-twist spun $(2, n)$ -torus link 等。) 本稿では、次の定理を紹介する。

定理 1.1. $\text{Braid}(F) = 4$ かつ F の連結成分数が 3 $\implies F$ は ribbon surface-link.

2. SURFACE BRAIDS AND CHART DESCRIPTIONS

2 つの 2 次元円板 D_1^2 と D_2^2 の直積 $D_1^2 \times D_2^2$ に、局所平坦に埋め込まれた向きのついた曲面 S が degree m の surface braid であるとは、射影 $\pi : D_1^2 \times D_2^2 \rightarrow D_2^2$ の制限写像 $\pi|_S$ が m 次の単純分岐被覆写像であり、 $\partial S = P_m \times \partial D_2^2$ であるときいいます。ただし P_m は D_1^2 の m 個の固定点です。2 つの surface braid S と S' が同値

であるとは、 D_2^2 上の D_1^2 束としてのファイバーを保つ $D_1^2 \times \partial D_2^2$ を止めた $D_1^2 \times D_2^2$ のアンビエントアイソトピーが存在するときをいいます。degree m の surface braid S に対して、 $\mathbf{R}^4 \setminus D_1 \times D_2$ 内の m 個の平行な 2 次元円板を S の境界に貼り合わせることで、 $\mathbf{R}^4$ 内の閉曲面つまり surface-link を得ることができる。この surface-link を surface braid S の閉包という。

補題 2.1. 2 つの同値な surface braid の閉包は、surface-link として同値である。

surface braid は、 D_2^2 上の chart で表すことができる。2 次元円板 D_2^2 上にはめ込まれた 1-6 価有限グラフ (空でも可) で、以下の条件を満たすものを、 m -chart という。

- (1) すべての辺は向きと整数 $\{1, 2, \dots, m-1\}$ によるラベルがついている。
- (2) すべての 6 価の頂点 W において、並んだ 3 つの辺は W の方に向きが付いていて、残り 3 つの辺は W から出る方に向きが付いている; 6 つの辺は整数 i と $i+1$ で交互にラベル付けされている。
- (3) すべてのはめ込みの特異点は横断的な 2 重点で、その 2 つの辺に付いているラベルの差は 2 以上となっている。

図 2 は 4-chart の例である。1 価の頂点を black vertex といい、6 価の頂点を white vertex、特異点を crossing という (図 3)。また、white vertex W に接合する向きの同じ 3 つの辺のうち、真ん中の辺を middle edge といい、それ以外の辺を non-middle edge という。2 つの black vertex をつなぐ辺を free edge といい、free edge とそれを中心とした同心円を合わせたものを oval nest という。 m -chart Γ に対して、次数 m の surface braid を一意的に与えることができる。この surface braid の閉包を Γ が表す surface-link という。例えば、図 2 の左の 4-chart が表す surface-link は 2-twist spun trefoil である。また、右図は図 1 を表す 4-chart である。

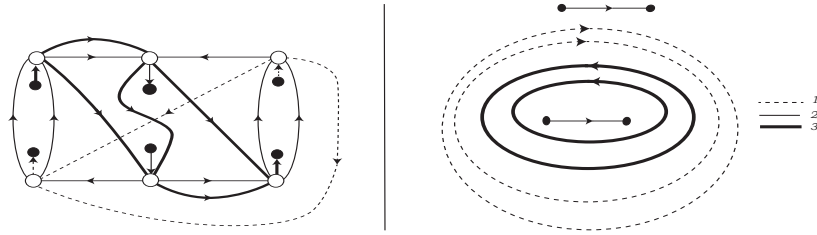


図 2. Examples of 4-charts

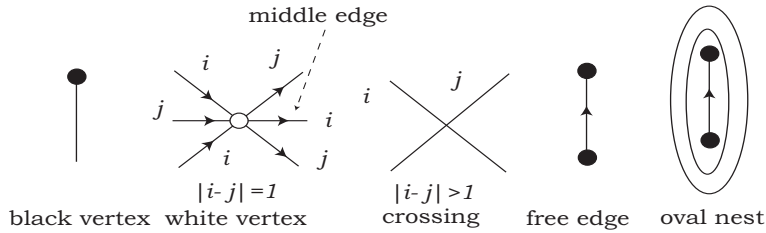
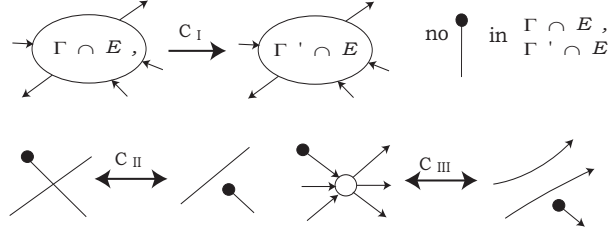


図 3. Edges, a free edge and an oval nest

図 4 で表された m -chart の変形はそれぞれ、 C_I -, C_{II} -, C_{III} -move といい、まとめて C -move という。2 つの m -chart Γ と Γ' が有限回の C -move と D_2^2 のアンビエントアイソトピーで移りあうとき、 Γ と Γ' は C -move 同値という。

定理 2.2 ([2, 3]). 2 つの m -chart が C -move 同値であることと、それらが表す曲面ブレイドが同値であることは必要十分条件である。

図 4. C -moves

いくつかの oval nest から構成される m -chart を **ribbon chart** という。図 2 の右側が ribbon chart の例である。

定理 2.3 ([1]). 任意の ribbon chart が表す surface-link は ribbon である。また、任意の ribbon surface-link は、ある ribbon chart が表す ribbon surface-link と同値である。

補題 2.1 と定理 2.2、2.3 より、次の定理を示せば、定理 1.1 は成り立つ。

定理 2.4. 任意の 3 成分 surface-link を表す 4-chart は、ribbon 4-chart と C -move 同値である。

3. LABELLING

Γ を m -chart とする。 $\Sigma(\Gamma) := \{D_2^2 \setminus \Gamma \text{ の領域 } \}$ 、 $\mathfrak{X} := \{a, b, c, \dots\}$ とおく。写像 $La : \Sigma(\Gamma) \rightarrow \mathfrak{X}^m$ が Labelling であるとは、次の条件を満たすときいう。

- 任意のラベルが i の辺 e に対して、 e の両側の領域を λ と λ' とするとき、 $La(\lambda) = (a_1, \dots, a_m)$ ならば $La(\lambda') = (a_1, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, a_i, a_{i+2}, \dots, a_m)$ となる。

図 5 が Labelling の例である。定義から、 λ がラベル i の辺が接合する black vertex に接する領域の場合、 $La(\lambda)$ の i 成分と $i+1$ 成分は等しい。

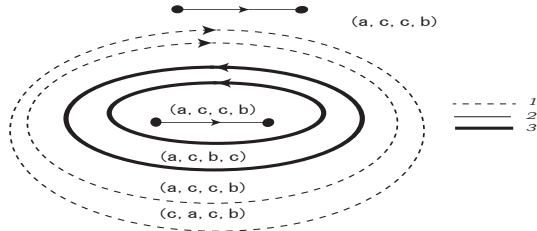


図 5. An example of a labelling

補題 3.1. 任意の $\lambda \in \Sigma(\Gamma)$ に対して、 $La(\lambda)$ に使われる $\mathfrak{X}$ の元の個数は Γ が表す surface-link の成分数と一致する。

Γ を 3 成分 surface-link を表す 4-chart とする。補題 3.1 より、任意の $\lambda \in \Sigma(\Gamma)$ に対して、 $La(\lambda)$ に使われる $\mathfrak{X}$ の元の個数は 3 種類。ここで、 $La(\lambda)$ に使われる $\mathfrak{X}$ の元が a, b, c がそれぞれ 1 個、1 個、2 個であると仮定する。その時、 $La(\lambda)$ は次の $\mathcal{A}$ の元である。

$$\mathcal{A} := \left\{ \begin{array}{l} (a, b, c, c), (a, c, b, c), (a, c, c, b), (b, a, c, c), (b, c, a, c), (b, c, c, a), \\ (c, a, b, c), (c, a, c, b), (c, b, a, c), (c, b, c, a), (c, c, a, b), (c, c, b, a) \end{array} \right\}.$$

Γ_2 を Γ のラベル 2 の辺とそれの接合する頂点の集まりからなる部分グラフとする。 $\mathcal{A}$ を次の 3 つの集合に分けると補題 3.2 が成り立つ。

$$\mathcal{A}_1 := \left\{ \begin{array}{l} (a, c, b, c), (b, c, a, c), (a, c, c, b), (b, c, c, a), \\ (c, a, c, b), (c, b, c, a), (c, a, b, c), (c, b, a, c) \end{array} \right\},$$

$$\mathcal{A}_2 := \{(a, b, c, c), (b, a, c, c)\}, \mathcal{A}_3 := \{(c, c, a, b), (c, c, b, a)\}.$$

補題 3.2. E を $D_2 \setminus \Gamma_2$ の領域、 λ, λ' を $E \setminus (E \cap \Gamma)$ の領域とする。もし $La(\lambda) \in \mathcal{A}_i$ ならば $La(\lambda') \in \mathcal{A}_i$ が成り立つ。

この補題の仮定を満たす E を $\mathcal{A}_i$ -polygon という。

ラベル i の辺 e に接する領域 λ に対して、 $La(\lambda)$ の i 成分と $i+1$ 成分がそれぞれ x, y の時、 e を (x, y) -edge であるという。 (x, y) -edge は (y, x) -edge でもある。仮定より、 black vertex に接合するラベル i の辺は (c, c) -edge である。

4. SKETCH PROOF OF THEOREM 2.4

3 成分 surface-link を表す 4-chart Γ に対して、 次の条件を (*), (**), (***) と表す。

- (*) (a, b) -edge を持たない。
- (**) black vertex に接合する辺はのラベルが 2 である。
- (***) D_2^2 内の 2 次元円板 $\mathfrak{B}_1, \dots, \mathfrak{B}_k$ が存在して、各 $G_i := \mathfrak{B}_i \cap \Gamma$ は oval nest か、連結な sub 4-chart とそれを中心とした同心円を合わせたものであり、 Γ は $G_1 \cup \dots \cup G_k$ とそれを中心とした同心円から構成される。

補題 4.1. 任意の degree 4 の surface braid の閉包であるような 3 成分 surface-link F を表す 4-chart は、条件 (*), (**), (***) を満たす 4-chart と C -move 同値である。

証明. S を degree 4 の閉包が F であるような surface braid とする。 S の連結成分を S_a, S_b, S_c が degree がそれぞれ 1, 1, 2 であるような surface braid としておく。このとき、 S_a, S_b は trivial 2-knot、 S_c は trivial surface-knot を表す。また、 $S_a \cup S_b$ は degree 2 の surface braid で 2 成分の 2-link を表す。この時、 $S_a \cup S_b$ を表す 2-chart は empty 2-chart と C -move 同値である。定理 2.2 より、 $D_1^2 \times \partial D_2^2$ を止めた $D_1^2 \times D_2^2$ のアンビエントアイソトピー $\{h_t\}_{0 \leq t \leq 1}$ が存在して、 $h_1(S_a \cup S_b)$ は empty 2-chart、すなわち (*) を満たす 2-chart により表される。このことから、 $h_1(S)$ は (*) を満たす 4-chart により表されることがわかる。(**) や (***) はよく知られている事実であり、それぞれ、図 6 の 2 つの変形 (C -move) を繰り返して用いることで得られる (参考 [1])。図 6 の上部は (*) を保ち、下部は (*) と (**) を保つ変形なので、この補題が証明される。 $\square$

補題 4.1 より、条件 (*), (**), (***) を満たす 4-chart のみ考える。

n, f をそれぞれ black vertex および free edge の数とする。 $n - 2f$ は常に偶数である。 $n - 2f$ に関する帰納法で定理 2.4 を証明する。 Γ を 3 成分 surface-link を表す 4-chart とする。定義から $n - 2f \geq 0$ であり、条件 (***) から $n - 2f = 0$ の時 Γ は ribbon 4-chart である。 $n - 2f = k > 0$ で成り立つと仮定する。 $n - 2f = k + 2$ とする。

補題 4.2. 次が成り立つ。

- 任意の black vertex が面する領域 λ に関して、 $La(\lambda) \in \mathcal{A}_1$ である。
- 任意の white vertex W に対して、 W に面する 2 つの領域 λ と λ' が存在して、 $La(\lambda) \in \mathcal{A}_1$ かつ $La(\lambda') \in \mathcal{A}_2 \cup \mathcal{A}_3$ である。
- 任意のラベル 2 の辺の両端の領域 λ と λ' に対して、 $La(\lambda) \in \mathcal{A}_1$ もしくは $La(\lambda') \in \mathcal{A}_1$ である。
- 任意の crossing は $\mathcal{A}_1$ -polygon に含まれる。

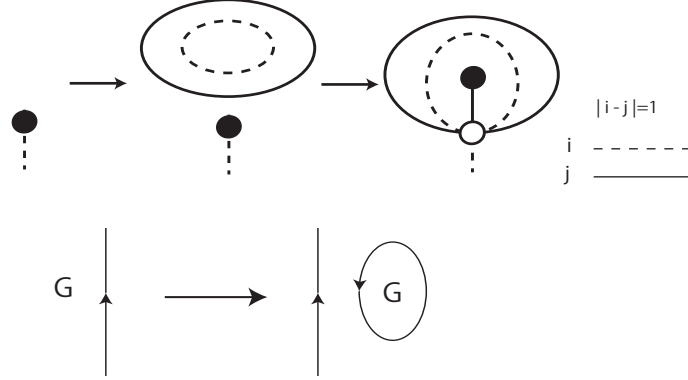


図 6

- 2つの A_1 -polygon にはさまれた辺を e する。 e に面する $\lambda \in \Sigma(\Gamma)$ に対して、 $La(\lambda) = (a, c, c, b)$ 、 (b, c, c, a) である。

いくつかの A_1 -polygon $E_1, \dots, E_l$ の和集合の閉包 $\mathfrak{L}$ で次を満たすものを Land という。

- white vertex が $\partial\mathfrak{L}$ に含まれている。
- $\mathfrak{L}$ は連結。
- $\mathfrak{L}$ は極大、すなわち、 $\mathfrak{L}$ は他の A_1 -polygon に面しない。

補題 4.3. G_i を *oval nest* ではないとする。その時、 $\Gamma \setminus \mathfrak{B}_i$ を止めた C -move で次を満たす 4-chart に変形できる。

- $\mathfrak{B}_i$ 内に含まれる Land $\mathfrak{L}_i$ はただ 1 つのみ。
- (*), (**), (***) を満たす。

証明. Land が 2 つ以上とする。 G_i は連結な sub 4-chart とそれを中心とした同心円を合わせたものなので、それらの Land は G_i 内のいくつかの辺でつながる。特に、補題 4.2 より、crossing を持たない 1 つの辺が存在して、2 つの Land をつなぐ。その時、図 7 もしくはその鏡像の変形 (C_I -move) のうち少なくとも 1 つを行うことができる。この変形は条件 (*), (**), (***) を保つ。この変形を繰り返すことで Land を 1 つにでき、補題が証明できた。□

補題 4.3 の条件を満たす 4-chart に対して、次のような自己交差のない道 γ_i (図 8) が存在する。

- γ_i は $\mathfrak{L}_i$ の内部に含まれる。
- γ_i は全ての G_i の black vertex を通過する。
- γ_i は crossing を通過しない。
- γ_i は G_i と横断的に交わる。

γ_i の $\mathfrak{L}_i$ における近傍 $N(\gamma_i)$ に対して、4-braid intersection word $w_\Gamma(\partial N(\gamma_i))$ を [3] の §18.9 のように求める。その時、次が成り立つ。

補題 4.4. $\Gamma \setminus \mathfrak{L}_i$ を止めた C -move で次の γ_i を持つ 4-chart に変形できる。

- $w_\Gamma(\partial N(\gamma_i)) = \prod_{j=1}^s \sigma_2^{\epsilon_j} \sigma_1^{\delta_j} \sigma_3^{\zeta_j}$ であり、各 j に対して、 $\epsilon_j = \pm 1$ 、 $\delta_j \equiv \zeta_j \equiv 0 \pmod{2}$ を満たす。
- (*), (**), (***) を満たす。

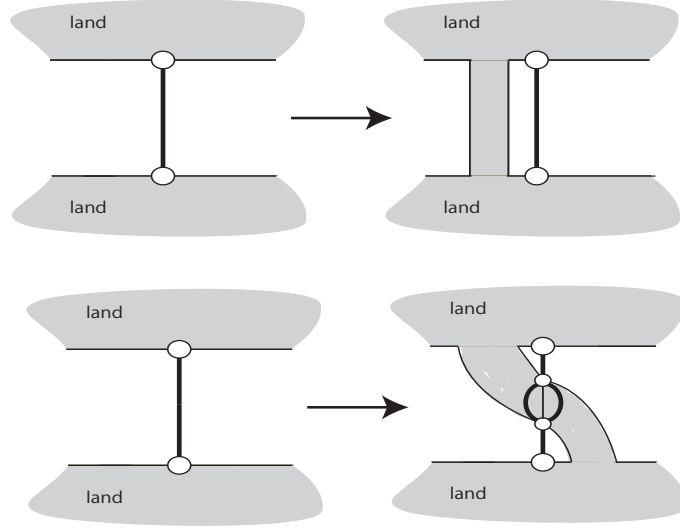


図 7

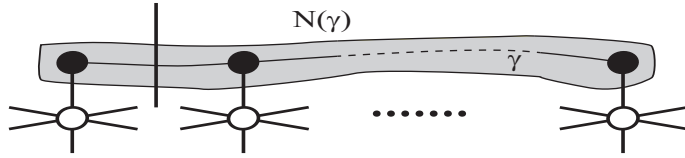


図 8

証明. γ_i を固定して、図 9 のような変形 (C_I -move) を繰り返し行くと $w_\Gamma(\partial N(\gamma_i)) = \prod_{j=1}^s \sigma_2^{\epsilon_j} \sigma_1^{\delta_j} \sigma_3^{\zeta_j}$ を得る。 $\delta_j \equiv \zeta_j \equiv 0 \pmod{2}$ は、補題 4.2 の最後からわかる。 $\square$

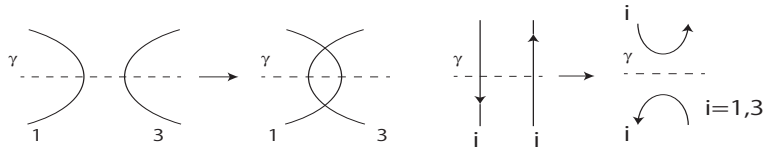


図 9

一方、各 $w_\Gamma(\partial \mathfrak{B}_i) = 1$ である。補題 4.3 より、 $\partial N(\gamma_i)$ と $\partial \mathfrak{B}_i$ は black vertex を通過しないアイソトピーで互いに移り合う。この時、 $w_\Gamma(\partial N(\gamma_i)) \equiv w_\Gamma(\partial \mathfrak{B}_i) \equiv 1 \pmod{B_4}$ が成り立つ。つまり、 $w_\Gamma(\partial N(\gamma_i))$ は自明な 4 成分 1 次元絡み目を表している。1 次元絡み目の不変量である linking number や長さ 3 の Milnor 不変量を使うと次の補題が証明できる。

補題 4.5. ある j が存在して、 $\epsilon_j = -\epsilon_{j+1}$ かつ $\delta_j = \zeta_j = 0$ である。

補題 4.5 より、 Γ の一部分に次の図 10 (i)-(iv) の上部かその鏡像うち 1 つがある。(i)-(iii) の場合は図 10 の C_I -move で $w_\Gamma(\partial N(\gamma_i))$ の語の長さを短くでき、その変形の後で、もう一度補題 4.5 を適用する。(iv) の場合は図の C_I -move で free edge を切り離す。この時、結果の 4-chart は $n - 2f = k$ を満たす。また、条件 (*), (**) も満

たす。 $n - 2f = k$ を保ったまま条件 $(***)$ を満たすように変形を行うことができ、帰納法の仮定から定理が証明できる。

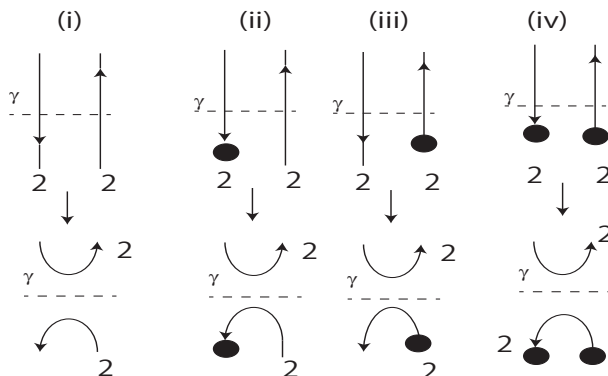


図 10

5. PROBLEMS

この章では、関連した問題をいくつか与える。

問題 5.1. 「 m 成分 surface-link F で $\text{Braid}(F) = m + 1$ ならば F は ribbon」が成り立つか？

問題 5.1 は、定理 1.1 の一般化したものである。また、定理 1.1 は、次の問題と関連している。

問題 5.2. 「4 個の black vertex を持つ chart で表される surface-link は ribbon」が成り立つか？

2 個の black vertex を持つ chart で表される surface-link は ribbon であることが知られており、また、6 個の black vertex を持つ chart で表される non-ribbon surface-link が存在する。(例えば、図 2 の左で表される 2-twist spun trefoil などがある。) 定理 1.1 は、ブレイド指数が 4 の 3-成分 surface-link の時、問題 5.2 が正しいことを指摘している。

REFERENCES

- [1] S. Kamada, *Surfaces in R^4 of braid index three are ribbon*, J. Knot Theory Ramifications, **1** (1992), 137–160.
- [2] S. Kamada, *An observation of surface braids via chart description*, J. Knot Theory Ramifications, **4** (1996), 517–529.
- [3] S. Kamada, *Braid and knot theory in dimension four*, Math. Surveys Monogr. **95**, Amer. Math. Soc., 2002.
- [4] O. Ya. Viro: Lecture given at Osaka City University, September, 1990.

〒 840-8502 佐賀市本庄町 1 番地
E-mail address: iwakiri@ms.saga-u.ac.jp