

E_6, E_8 型部分因子環の平面代数と 3次元多様体の状態和不変量の 組み合わせ的構成について

京都大学数理解析研究所 D2
岡崎 建太

ABSTRACT. 本報告では, 第1節で部分因子環を理論的背景に持つ平面代数と状態和不変量についての概説をした後, 第2節で E_6 型部分因子環の平面代数について具体的に考察し, 主結果を述べる. 第3節では E_6 型状態和不変量の具体的な構成法について述べる.

1. 導入

平面代数 (planar algebra) とは 1999 年に Jones [4] によって提示された概念で, おおまかに言えば, ラベル付けられた基点付きの円板を含む影付きタングル (平面タングルと呼ばれる. FIGURE 1 参照.) たちによって構成されるフィルター付き代数のことである. Jones は指数有限で II_1 型の部分因子環と, 平面代数で次の「よい条件」を満たすものの間に対応関係があることを示した. 条件: 閉じたタングル全体のなすベクトル空間は 1 次元, かつ 有限次元, 球面的, 非退化, 半単純 であること (詳しい定義は [4] を参照). これにより部分因子環の議論が, 平面代数の言葉だけで組み合わせ的に再構成できる可能性が生まれたのである. 与えられた部分因子環に対応する平面代数を, 部分因子環の平面代数 (subfactor planar algebra) という.

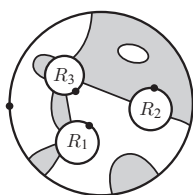


FIGURE 1. 平面タングル

続いて提唱されたのが, 次の Kuperberg 問題である.

部分因子環の平面代数について, 生成元と関係式を具体的に与え, それが実際に元の平面代数と一致していること, さらに上述の「よい条件」を満たしていることを平面代数の議論だけで証明せよ.

例えば A_n 型部分因子環の平面代数は Temperley-Lieb 代数であり, 対応する平面代数はラベルがついていない平面タングルたちによって構成されることがよく知られている [1, 2]. また, Morrison-Peters-Snyder

[5] は D_{2n} 型部分因子環の平面代数について, Kuperberg の問題に完全な回答を与えた. また, Bigelow [6] は E_6, E_8 型部分因子環の平面代数について, その生成元と関係式を与え, さらにそのベクトル空間としての基底も決定した. しかし, 閉じたタングル全体のなすベクトル空間は 1 次元であることと, 非退化性, 及び半単純性の証明には作用素環論の分野で証明された『 E_6, E_8 型部分因子環は存在する』という事実 [3] を用いており, 完全に組み合わせ的ではなかった.

一方 II_1 -部分因子環 $N \subset M$ が指数有限のとき, ここから導かれる $6j$ -記号という量を用い, 三角形分割された 3 次元多様体の各“状態”の“重み”を足し上げることにより, 三角形分割のとり方に寄らない 3 次元多様体の不変量を得ることができる. これを 状態和不変量 という. しかしこの不変量を構成には (当然ながら) 作用素環の知識が必要であった.

2. E_6 型部分因子環の平面代数の構成

今回の主結果は, Kuperberg 問題の E_6, E_8 型に対する完全に解答を与えたことである. 以下にその方法を概説する. ただし, 簡単のため E_6 型に話を限ることにする (E_8 型についてもほぼ同じ議論が可能である). まず平面代数で, 生成元がラベル付けられた 6 本足の円盤 

, 関係式が以下のようなものであるものを考える. Bigelow はこの平面代数が E_6 型部分因子環の平面代数を与えることを (部分因子環の知識を用いて) 示した.

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad \bigcirc &= [2] \emptyset, & \text{(ii)} \quad \text{circle with 6 legs and dot, with a loop} &= 0, & \text{(iii)} \quad \text{circle with 6 legs and dot} &= e^{2\pi\sqrt{-1} \cdot \frac{2}{3}} \text{circle with 6 legs and dot}, \\ \text{(iv)} \quad \text{two circles with 6 legs and dots stacked} &= \text{circle with 6 legs and dot} + [2]^2[3] \text{rectangle with 6 legs}, & \text{(v)} \quad \text{circle with 6 legs and dot inside a rectangle} &= 0. \end{aligned}$$

ここで一番外側の円盤は略記してあり (基点は全て左上にあるものと約束する), 長方形の箱は Jones-Wenzl 射影をあらわし, $[n] = (q^n - q^{-n})/(q - q^{-1})$, $q = e^{\pi\sqrt{-1}/12}$ とする.

次にこの平面代数の特別な元 , ,  を以下で定める.

$$\begin{aligned} \text{circle with 6 legs and dot labeled } P &= \frac{1}{[2][4]} ([2]^2 \text{rectangle with 6 legs} - \text{circle with 6 legs and dot labeled } S), & \text{circle with 6 legs and dot labeled } P' &= \frac{1}{[2][4]} ([3] \text{rectangle with 6 legs} + \text{circle with 6 legs and dot labeled } S), \\ \text{circle with 6 legs and dot labeled } Q &= \text{rectangle with 6 legs} - \frac{1}{[2][4]} \text{two circles with 6 legs and dots stacked}. \end{aligned}$$

主結果 1. E_6 型部分因子環の平面代数の主要グラフは FIGURE 2. でえられる.

ある) の1つを選ぶ選び方 m をマーキングと呼ぼう. $\mathcal{T}$ の2単体全体から集合 $\{\cdot, \circ\}$ への写像 φ と, $\mathcal{T}$ の1単体全体から $\mathcal{M}^{(0)}$ への写像 λ の組 (φ, λ) を $\mathcal{T}$ の色付けとよぶ. このとき, 状態和 $Z^{E_6}(M, \mathcal{T}, \Phi, m) \in \mathbb{C}$ を次で定める.

$$Z^{E_6}(M, \mathcal{T}, \Phi, m) = w^{-v} \sum_{(\varphi, \lambda)} \prod_E \text{tr}(\lambda_E) \prod_T W(T, \varphi, \lambda, \Phi, m),$$

ここで $w = 2 + [3]^2$, $\text{tr}(\emptyset) = \text{tr}(f^{(2)}) = 1$, $\text{tr}(Q) = [3]$, v は $\mathcal{T}$ の0単体の数であり, (φ, λ) は $\mathcal{T}$ の色付け全体を, E は $\mathcal{T}$ の1単体全体を, そして T は $\mathcal{T}$ の3単体全体を走る. さらに, “重み” $W(T, \varphi, \lambda, \Phi, m)$ を次で定めた.

$$W\left(\begin{array}{c} \text{triangle with vertices } A, B, C \text{ and edges } e, f, d \\ \text{with additional edges } a, b, c \end{array}\right) = \begin{cases} \left| \begin{array}{c} \text{triangle with vertices } A, B, C \text{ and edges } e, f, d \\ \text{with additional edges } a, b, c \end{array} \right|, & T \text{ の向きが } \Phi \text{ と一致しているとき} \\ \text{上式の複素共役}, & \text{その他} \end{cases}.$$

ただし, $(x, y, z) = (a, b, c), (a, e, f), (e, c, d), (b, d, f)$ のいずれかが $H(x, y, z) = 0$ となるときは $W(T, \varphi, \lambda, \Phi, m) = 0$ とし, 白丸につく * 記号はマーキングに従ってつけるものとする. ここで $6j$ 記号 $|\cdot|$ は次のように定めた (右辺分子のマーキングは左辺のマーキングと同じようにとるものとする).

$$\left| \begin{array}{c} \text{triangle with vertices } A, B, C \text{ and edges } e, f, d \\ \text{with additional edges } a, b, c \end{array} \right| = \frac{\left| \begin{array}{c} \text{triangle with vertices } A, B, C \text{ and edges } e, f, d \\ \text{with additional edges } a, b, c \end{array} \right|}{\sqrt{\left| \begin{array}{c} \text{triangle with vertices } A, B, C \text{ and edges } e, f, d \\ \text{with additional edges } a, b, c \end{array} \right| \left| \begin{array}{c} \text{triangle with vertices } A, B, C \text{ and edges } e, f, d \\ \text{with additional edges } a, b, c \end{array} \right| \left| \begin{array}{c} \text{triangle with vertices } A, B, C \text{ and edges } e, f, d \\ \text{with additional edges } a, b, c \end{array} \right| \left| \begin{array}{c} \text{triangle with vertices } A, B, C \text{ and edges } e, f, d \\ \text{with additional edges } a, b, c \end{array} \right|}}.$$

命題 $Z^{E_6}(M, \mathcal{T}, m)$ の値は三角形分割 $\mathcal{T}$ やマーキング m のとり方に依らない. ゆえに $Z^{E_6}(M) = Z^{E_6}(M, \mathcal{T}, m)$ は M の位相不変量である.

以下に E_6 型 $6j$ 記号の値の表を記す. ただし, 表記の簡単のため $f^{(0)}, f^{(2)}, Q$ を各々点線, 実線, 太線で表している. E_8 型については現在計算中である.

$\left \begin{array}{c} \text{triangle with vertices } A, B, C \text{ and edges } e, f, d \\ \text{with additional edges } a, b, c \end{array} \right = 1,$	$\left \begin{array}{c} \text{triangle with vertices } A, B, C \text{ and edges } e, f, d \\ \text{with additional edges } a, b, c \end{array} \right = \frac{1}{2^{1/4}[2]^{1/2}},$	$\left \begin{array}{c} \text{triangle with vertices } A, B, C \text{ and edges } e, f, d \\ \text{with additional edges } a, b, c \end{array} \right = 1,$	$\left \begin{array}{c} \text{triangle with vertices } A, B, C \text{ and edges } e, f, d \\ \text{with additional edges } a, b, c \end{array} \right = \frac{1}{\sqrt{2}[2]},$
$\left \begin{array}{c} \text{triangle with vertices } A, B, C \text{ and edges } e, f, d \\ \text{with additional edges } a, b, c \end{array} \right = \frac{1}{\sqrt{2}[2]},$	$\left \begin{array}{c} \text{triangle with vertices } A, B, C \text{ and edges } e, f, d \\ \text{with additional edges } a, b, c \end{array} \right = \frac{1}{\sqrt{2}[2]},$	$\left \begin{array}{c} \text{triangle with vertices } A, B, C \text{ and edges } e, f, d \\ \text{with additional edges } a, b, c \end{array} \right = \frac{1}{\sqrt{2}[2]},$	$\left \begin{array}{c} \text{triangle with vertices } A, B, C \text{ and edges } e, f, d \\ \text{with additional edges } a, b, c \end{array} \right = 1,$
$\left \begin{array}{c} \text{triangle with vertices } A, B, C \text{ and edges } e, f, d \\ \text{with additional edges } a, b, c \end{array} \right = \frac{1}{\sqrt{3}[2]^2},$	$\left \begin{array}{c} \text{triangle with vertices } A, B, C \text{ and edges } e, f, d \\ \text{with additional edges } a, b, c \end{array} \right = -\frac{1}{\sqrt{6}[2]},$	$\left \begin{array}{c} \text{triangle with vertices } A, B, C \text{ and edges } e, f, d \\ \text{with additional edges } a, b, c \end{array} \right = \frac{1}{\sqrt{6}[2]^2},$	$\left \begin{array}{c} \text{triangle with vertices } A, B, C \text{ and edges } e, f, d \\ \text{with additional edges } a, b, c \end{array} \right = -\frac{1}{\sqrt{6}[2]},$

$$\left| \begin{array}{c} \text{Diagram 1} \end{array} \right| = -\frac{1}{\sqrt{3}[2]}, \quad \left| \begin{array}{c} \text{Diagram 2} \end{array} \right| = \frac{1}{\sqrt{6}[2]}, \quad \left| \begin{array}{c} \text{Diagram 3} \end{array} \right| = -\frac{1}{\sqrt{2}[2]}.$$

REFERENCES

- [1] L. Kauffman, *State models and the Jones polynomial*,
Topology, **26** (1987), 395–407.
- [2] L. Kauffman, *An invariant of regular isotopy*,
Trans. Amer. Math. Soc., **318** (1990), 417–471.
- [3] Masaki Izumi, *Application of fusion rules to classification of subfactors*,
Publ. Res. Inst. Math. Sci. **27** (1991), 953–994.
- [4] V. Jones, *Planar algebras, I* (1999),
[arxiv.org:math/9909027v1](https://arxiv.org/abs/math/9909027v1) [math.QA].
- [5] *Skein theory for the D_{2n} planar algebras*,
[arXiv:math/0808.0764](https://arxiv.org/abs/math/0808.0764) DOI:10.1016/j.jpaa.2009.04.010
- [6] S. Bigelow, *Skein theory for the ADE planar algebras* (2009),
[arXiv:math/0903.0144](https://arxiv.org/abs/math/0903.0144)