Cowrithe の最大値と最小値について

神戸大学　大学院　理学研究科
博士課程前期課程２年
武村　敦

1　Introduction

私が今回参考にした論文は林忠一郎先生の「A lower bound for the number of Reidemeister moves for unknotting, J. Knot Theory Ramifications Vol.15(2006) 313-325」である．この論文において, cowrithe は, knot diagram に関する値である．cowrithe によって, ある knot に対する２つの違う knot diagram に関して, 一方から他方へ変形するのに必要な Reidemeister move の回数の最小値を評価することができる．私は cowrithe を使って Perco 対においての Reidemeister move の回数の最小値を求めようとしたが, ５回以上１０回以下までしか評価できなかった．そこで, 今度は cowrithe の性質について調べることにした．

2　Definition

D を knot $K(\subset \mathbb{R}^3)$ の knot diagram とし, 埋め込み　$f : S^1 \to \mathbb{R}^2 s.t. f(S^1) = D$ をとる．ここで, p を D の crossing とすると, $f^{-1}(p) = \{p_1, p_2\} \subset S^1$ がとれる．このとき, $C := (S^1, \{\gamma_p\})$ を D の **chord diagram** という．γ_p とは, p_1 と p_2 を結ぶ線分（**chord** という）である．では, chord diagram をどのように描くかを述べる．まず, knot diagram D 上の crossing でない point s を適当にとり, そこから knot に沿って crossing に文字を振っていく．そして元の point に戻ってくると crossing の数の２倍の文字の列ができる．これを S^1 上にある point $f^{-1}(s)$ から knot に関連した向きに沿って文字を振っていき, 同じ文字を chord で結べばよい．ここで, γ_p の符号 $sign(\gamma_p) := sign(p)$ を定義する．

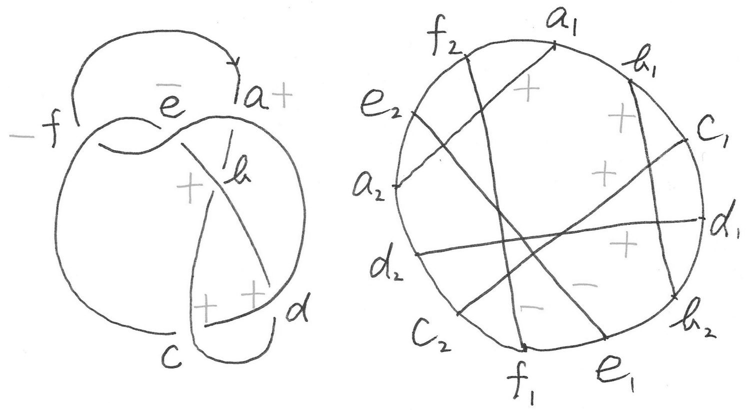

Fig. 1　Example : chord diagram

γ_p, γ_q を C の chord とする．γ_p と γ_q　が **interleaved** であるとは, p_1, p_2 と q_1, q_2 が S^1 上で交互に並ぶことである．このとき, $\varepsilon(\gamma_p, \gamma_q)$ を

$$\varepsilon(\gamma_p, \gamma_q) = \begin{cases} sign(\gamma_p) \cdot sign(\gamma_q) & \gamma_p \text{と} \gamma_q \text{が interleaved のとき} \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

で定める．このとき $x(D) := \sum_{\gamma_p, \gamma_q} \varepsilon(\gamma_p, \gamma_q)$ を D の **cowrithe** と定義する．

ここで, cowrithe の具体的な作り方を見てみる．γ_p と γ_q が interleaved であるとは, 図形として見た場合, γ_p と γ_q が 1 点で交わっているときである．よって, γ_p と γ_q の交点に符号 $\varepsilon(\gamma_p, \gamma_q)$ を対応させてもよい．

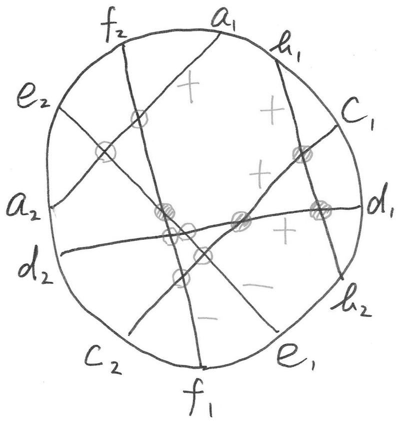

Fig. 2　Example : cowrithe

Fig.2 において, $\varepsilon(\gamma_a, \gamma_e) = -1, \varepsilon(\gamma_a, \gamma_f) = -1, \varepsilon(\gamma_b, \gamma_c) = 1, \varepsilon(\gamma_b, \gamma_d) = 1, \varepsilon(\gamma_c, \gamma_d) = 1, \varepsilon(\gamma_c, \gamma_e) = -1, \varepsilon(\gamma_c, \gamma_f) = -1, \varepsilon(\gamma_d, \gamma_e) = -1, \varepsilon(\gamma_d, \gamma_f) = -1, \varepsilon(\gamma_e, \gamma_f) = 1$ なので, $x(D) = -2$ となる．

次に, cowrithe の性質について述べる．

Lemma [Hayashi '06]

knot diagram D, D' において, D' は D を Reidemeister move 1 回で変形したものとする．その変形が

(1) Reidemeister move I のとき $x(D) = x(D')$,

(2) Reidemeister move II のとき $x(D) = x(D')$ or $x(D) = x(D') \pm 1$,

(3) Reidemeister move III のとき $x(D) = x(D') \pm 1$

この Lemma により 2 つの knot diagram における Reidemeister move の回数の最小値を評価できる．

3 Results

Theorem.1

n が D の crossing の個数ならば

(1) n が偶数のとき

$-\frac{1}{4}n^2 \leqq x(D) \lneqq \frac{1}{2}n(n-1)$,

(2) n が奇数のとき

$-\frac{1}{4}(n^2-1) \leqq x(D) \leqq \frac{1}{2}n(n-1)$

(remark:ここで, $x(D)$ はこの範囲内のすべての値を実現するわけではない．今分かっているのは, 最大値について n が奇数のときは $x(D) = \frac{1}{2}n(n-1)$ が実現し, 偶数のときは実現しない．また, 最小値について n が 4 の倍数のときは $x(D) = -\frac{1}{4}n^2$ が実現し, それ以外の場合は実現するかどうか不明である．)

Theorem.2

$X_i := \{x(D) | D : \text{crossing が } i \text{ 個の knot diagram}\}$ と定義すると,

$X_1 = \{0\}$,

$X_2 = \{0\}$,

$X_3 = \{-1, 0, 3\}$

$X_4 = \{-4, -1, 0, 3, 4\}$

$X_5 = \{-5, -4, -2, -1, 0, 2, 3, 4, 7, 10\}$
$X_6 = \{-8, -6, -5, -4, -2, -1, 0, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 10, 11\}$
となる.

見て分かるように, X_i の元は０に対して対象に分布していない. また, 任意の整数 n に対して $x(D) = n$ となる D が存在する.

4 Proofs

proof of Theorem.1
$C = (S^1, \{\gamma\})$ を **abstract chord diagram** と定義する. つまり C は単に円周 S^1 と端点を S^1 上に持つ線分 γ の集合の pair となる. C は knot diagram によってできた chord diagram 以外の chord diagram を含むので, abstract chord diagram 全体の集合は chord diagram 全体の集合を含む. ここで, chord diagram と同様に $sign(\gamma)$, interleaved, $\varepsilon(\gamma, \gamma'), x(C)$ を定義する.

Lemma
n が C の chord の個数ならば
(1) n が偶数のとき
$-\dfrac{1}{4}n^2 \leqq x(D) \leqq \dfrac{1}{2}n(n-1)$,
(2) n が奇数のとき
$-\dfrac{1}{4}(n^2-1) \leqq x(D) \leqq \dfrac{1}{2}n(n-1)$
また, 範囲内のすべての整数値においてそれを実現する C がある.

proof of Lemma
最大値を取るのは, どの chord に対しても, 他の $n-1$ 本の chord が交わっており, かつ chord が正のときである. 最小値を取るのは, 正の chord と負の chord がすべて交わり, 正の chord 同士, または負の chord 同士が交わらず, 正の chord と負の chord がほぼ同数のときである.

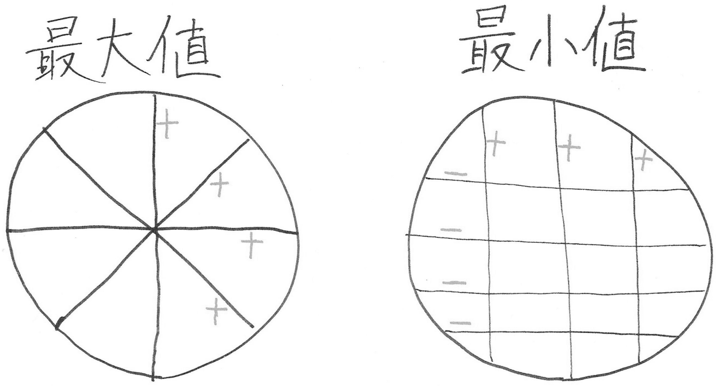

Fig. 3　cowrithe が最大値と最小値となる abstract chord diagram の例

最大値 -1 を実現する abstract chord diagram は最大値の abstract chord diagram において, ある chord を選び, $n-1$ 個ある交点を, １つだけ外す操作で作ることができる. この操作で最大値 $-(n-1)$ まで作ることができる. あとは前に選んだ chord 以外の chord において同様の操作をすると, 最大値から０までのすべての値において, それを実現する abstract chord diagram を作ることができる. 最小値 $+1$ については, Fig.3 の最小値を取る abstract chord diagram の一番左の正の chord の交点を１つ外せば実現できる. 交点を１つ１つ外していくと, 最小値 −（負の chord の本数）まで実現できる. あとは順々に左から正の chord の交点を

外していけば, 最小値から 0 までのすべての値において, それを実現する abstract chord diagram を作ることができる.

abstract chord diagram が Lemma で示した範囲を取り, また, abstract chord diagram 全体の集合は chord diagram 全体の集合を含んでいるので, Theorem.1 は証明された.

proof of Theorem.2

knot diagram D が composite であるとは, D が自明でない 2 つの knot diagram の連結和として表される状態と定義する. D が prime であるとは, D が composite でない状態と定義する. $Y_i := \{x(D)|D:$ crossing が i 個の prime knot diagram$\}$ と定義する. $X_i \oplus X_j := \{m+n|m \in X_i, n \in X_j\}$ と定義する.

Lemma

$$X_k = \left(\bigcup_{i=1}^{k-1}(X_i \oplus X_{k-i})\right) \cup Y_k$$

proof of Lemma

D が composite の場合を考える. D は自明でない 2 つの knot diagram の連結和なので, D の cowrithe は D' と D'' の cowrithe を足したものとなる (Fig.4).

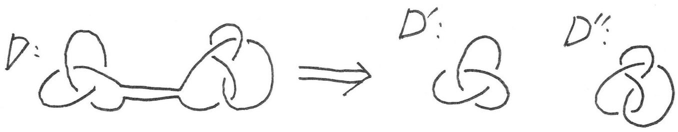

Fig. 4

よって $\bigcup_{i=1}^{k-1}(X_i \oplus X_{k-i})$ は D が composite の場合の cowrithe の範囲となる. D が prime の場合は Y_k に対応している. よって Lemma が証明された.
この Lemma により Theorem.2 で示した集合が得られる.