

絡み目の格子点表示 (Lattice presentation of a link)

稲角剛

大阪市立大学大学院理学研究科

概要

全ての絡み目はブレイド表示で表すことが出来、ブレイド表示は格子点表示で表すことが出来る。素な絡み目の格子点表示 $x=(x_1, x_2, \dots, x_n)$ に対し、 $|x|_N=(|x_{i_1}|, |x_{i_2}|, \dots, |x_{i_n}|)$ を $|x|=(|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|)$ の成分の置換で $|x_{i_1}| \leq |x_{i_2}| \leq \dots \leq |x_{i_n}|$ を満たすものとする。本稿では、長さが n となる $|x|_N$ の個数が決定出来たので、それについて報告する。

1 絡み目の格子点表示の定義

格子点とは n 個の整数 x_i の組 $x=(x_1, x_2, \dots, x_n)$ のことである。格子点 x に対し、各成分 x_i を絶対値 $|x_i|$ に置き換えたものを $|x|=(|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|)$ と表記する。さらに、各成分 $|x_i|$ を、 $|x_{i_1}| \leq |x_{i_2}| \leq \dots \leq |x_{i_n}|$ となるように $(1, 2, \dots, n)$ の置換 $(i_1, i_2, \dots, i_n)$ を施したものを $|x|_N=(|x_{i_1}|, |x_{i_2}|, \dots, |x_{i_n}|)$ と表す。また、このときの n を x の (または $|x|_N$ の) 長さ $l(x)$ と呼ぶ。

2つの格子点 x, y に対し以下の条件のうちの1つが満たされるとき、 $x < y$ と定める。

- (1) $l(x) < l(y)$
- (2) $l(x)=l(y)$ かつ自然数の順序に関する辞書式順序で $|x|_N < |y|_N$
- (3) $|x|_N=|y|_N$ かつ自然数の順序に関する辞書式順序で $|x| < |y|$
- (4) $|x|=|y|$ かつ $0 < 1 < -1 < 2 < -2 < \dots$ と定めた $\mathbb{Z}$ の整列順序に関する辞書式順序で $x < y$

格子点 $x=(x_1, x_2, \dots, x_n)$ に対し、 $\max|x|=\max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$ とする。次のようにして、格子点 x から $(\max|x| + 1)$ -次ブレイド $\beta(x)$ が得られる: $\beta(x)=\sigma_{|x_1|}^{\text{sign}(x_1)} \sigma_{|x_2|}^{\text{sign}(x_2)} \dots \sigma_{|x_n|}^{\text{sign}(x_n)}$ (ただし $\sigma_{|0|}^{\text{sign}(0)}=1$ とおく)。ブレイド $\beta(x)$ が絡み目 L を表すとき、 x を L の格子点表示という [1]。Alexander の定理により、全ての絡み目は格子点表示で表すことが出来る。また、整列集合の任意の部分集合は最小元を持つので、任意の絡み目の最小の格子点表示が一意に定まる。本稿では絡み目の最小の格子点表示について考察する。自然数 n に対して、長さが n となる $|x|_N$ の重複を除いた個数を $\sharp|x|_N$ と表す。ただし、このときの x は、素な絡み目の L の最小の格子点表示とし、 $|x|_N$ の重複とは $|x|_N$ の成分は異なるが同じ絡み目の $|x|_N$ となることである。次が主定理である。

主定理. 自然数 n に対し

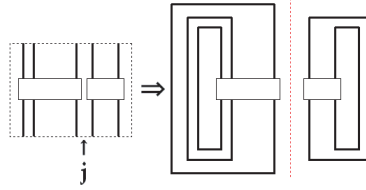
$$\sharp |x|_N = \begin{cases} \frac{1}{2}(F(2k) + F(k)) & (n = 2k + 1) \\ \frac{1}{2}(F(2k - 1) + F(k + 1)) & (n = 2k) \end{cases}$$

ただし, $F(n)$ はフィボナッチ数を表す.

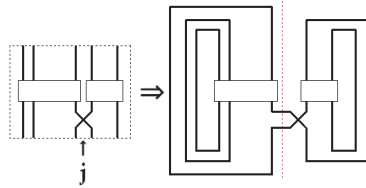
第2章で $|x|_N$ の性質について述べ, 第3章で主定理を証明する. 第4章では素な絡み目の格子点表示 x について考察する.

2 $|x|_N$ の性質

この章では, 分離絡み目および連結和の格子点表示 x における $|x|_N$ の性質について述べる. 連結でない絡み目図式, すなわち分離和の図式を表すブレイドの格子点表示 x に対して, $|x|_N$ は $|x|_N = (\dots, (j-1)^{a_{j-1}}, (j+k)^{a_{j+k}}, \dots)$ ($k \geq 1$) となる. 逆に, このような格子点表示を持つ絡み目は, 分離絡み目である.



また, 連結和の絡み目を表すブレイドの格子点表示 x は, $|x|_N = (\dots, (j-1)^{a_{j-1}}, j, (j+1)^{a_{j+1}}, \dots)$ となる. 逆に, このような格子点表示を持つ絡み目は連結和である.



本稿では素な絡み目の格子点表示を考える. 長さが n の格子点表示 x は $|x|_N = (1^{a_1}, 2^{a_2}, \dots, m^{a_m})$ ($a_1 + a_2 + \dots + a_m = n$) と表される. 上記より $a_i = 0, 1$ のときは素ではないので, 次章以降では $a_i \geq 2$ ($1 \leq i \leq m$) を満たす x を考える.

3 主定理の証明

この章では主定理を証明する.

主定理の証明. まず, 長さが n ($2 \leq n \leq 8$) の素な絡み目の格子点表示 x の $|x|_N$ の一覧を以下の表に示す (ここでは重複を許す).

$l(x) = n$ の $ x _N$ の表							
$l(x)$	2	3	4	5	6	7	8
$ x _N$	(1^2)	(1^3)	(1^4) $(1^2, 2^2)$	(1^5) $(1^3, 2^2)$ $(1^2, 2^3)$	(1^6) $(1^4, 2^2)$ $(1^3, 2^3)$ $(1^2, 2^4)$ $(1^2, 2^2, 3^2)$	(1^7) $(1^5, 2^2)$ $(1^4, 2^3)$ $(1^3, 2^4)$ $(1^2, 2^5)$ $(1^3, 2^2, 3^2)$ $(1^2, 2^3, 3^2)$ $(1^2, 2^2, 3^3)$	(1^8) $(1^6, 2^2)$ $(1^5, 2^3)$ $(1^4, 2^4)$ $(1^3, 2^5)$ $(1^2, 2^6)$ $(1^4, 2^2, 3^2)$ $(1^3, 2^3, 3^2)$ $(1^3, 2^2, 3^3)$ $(1^2, 2^4, 3^2)$ $(1^2, 2^3, 3^3)$ $(1^2, 2^2, 3^4)$ $(1^2, 2^2, 3^2, 4^2)$

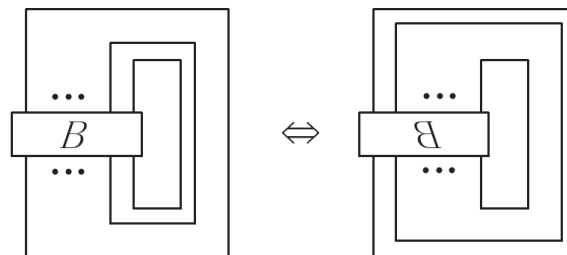
長さ n の $|x|_N$ は, 長さが $n-1$ の $|x|_N = (1^{a_1}, 2^{a_2}, \dots, m^{a_m})$ を $|x|_N = (1^{a_1+1}, 2^{a_2}, \dots, m^{a_m})$ の形にしたもの, および長さが $n-2$ のときの $|x|_N = (1^{a_1}, 2^{a_2}, \dots, m^{a_m})$ を $|x|_N = (1^2, 2^{a_1}, 3^{a_2}, \dots, (m+1)^{a_m})$ の形にしたものである. よって上の表における $|x|_N$ の個数はフィボナッチ数をなす. フィボナッチ数 $F(n)$ とは以下の条件を満たす数列に現れる数である:

$$F(1) = F(2) = 1,$$

$$F(n) = F(n-1) + F(n-2) \quad (n \geq 3).$$

$$\text{一般項は } F(n) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left\{ \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right\} \text{ である.}$$

次に重複を除くことを考えることにする. $|x|_N = (1^{a_1}, 2^{a_2}, \dots, m^{a_m})$ を持つ絡み目と $|x|_N = (1^{a_m}, 2^{a_{m-1}}, \dots, m^{a_1})$ 持つ絡み目は同型である (下図参照).



このとき, 自然数の順序に関する辞書式順序で $(1^{a_1}, 2^{a_2}, \dots, m^{a_m}) \leq (1^{a_m}, 2^{a_{m-1}}, \dots, m^{a_1})$ となるので, 左辺の $|x|_N$ だけを数える. すると一覧表は以下ようになる. この表の $|x|_N$ の個数が $\sharp|x|_N$ である.

$l(x) = n$ の (*) の左辺の表

$l(x)$	2	3	4	5	6	7	8
$ x _N$	(1^2)	(1^3)	(1^4) $(1^2, 2^2)$	(1^5) $(1^3, 2^2)$	(1^6) $(1^4, 2^2)$ $(1^3, 2^3)$ $(1^2, 2^2, 3^2)$	(1^7) $(1^5, 2^2)$ $(1^4, 2^3)$ $(1^3, 2^2, 3^2)$ $(1^2, 2^3, 3^2)$	(1^8) $(1^6, 2^2)$ $(1^5, 2^3)$ $(1^4, 2^4)$ $(1^4, 2^2, 3^2)$ $(1^3, 2^3, 3^2)$ $(1^3, 2^2, 3^3)$ $(1^2, 2^4, 3^2)$ $(1^2, 2^2, 3^2, 4^2)$
$\sharp x _N$	1	1	2	2	4	5	9

$$(*) (1^{a_1}, 2^{a_2}, \dots, m^{a_m}) \leq (1^{a_m}, 2^{a_{m-1}}, \dots, m^{a_1})$$

次に上の表の中で $(1^{a_1}, 2^{a_2}, \dots, m^{a_m}) = (1^{a_m}, 2^{a_{m-1}}, \dots, m^{a_1})$ となるものに注目し, 長さが偶数のものと奇数のものに分けると以下の表のようになる.

 $(*)$ の等号が成立し, $l(x)$ が偶数の場合

$l(x)$	2	4	6	8	10	12
$ x _N$	(1^2)	(1^4) $(1^2, 2^2)$	(1^6) $(1^3, 2^3)$ $(1^2, 2^2, 3^2)$	(1^8) $(1^4, 2^4)$ $(1^3, 2^2, 3^3)$ $(1^2, 2^4, 3^2)$ $(1^2, 2^2, 3^2, 4^2)$	(1^{10}) $(1^5, 2^5)$ $(1^4, 2^2, 3^4)$ $(1^3, 2^4, 3^3)$ $(1^2, 2^6, 3^2)$ $(1^3, 2^2, 3^2, 4^3)$ $(1^2, 2^3, 3^3, 4^2)$ $(1^2, 2^2, 3^2, 4^2, 5^2)$	(1^{12}) $(1^6, 2^6)$ $(1^5, 2^2, 3^5)$ $(1^4, 2^4, 3^4)$ $(1^3, 2^6, 3^3)$ $(1^2, 2^8, 3^2)$ $(1^4, 2^2, 3^2, 4^4)$ $(1^3, 2^3, 3^3, 4^3)$ $(1^2, 2^4, 3^4, 4^2)$ $(1^3, 2^2, 3^2, 4^2, 5^3)$ $(1^2, 2^3, 3^2, 4^3, 5^2)$ $(1^2, 2^2, 3^4, 4^2, 5^2)$ $(1^2, 2^2, 3^2, 4^2, 5^2, 6^2)$
	1	2	3	5	8	13

(*) の等号が成立し, $l(x)$ が奇数の場合

$l(x)$	3	5	7	9	11	13
$ x _N$	(1^3)	(1^5)	(1^7) $(1^2, 2^3, 3^2)$	(1^9) $(1^3, 2^3, 3^3)$ $(1^2, 2^5, 3^2)$	(1^{11}) $(1^4, 2^3, 3^4)$ $(1^3, 2^5, 3^3)$ $(1^2, 2^7, 3^2)$ $(1^2, 2^2, 3^3, 4^2, 5^2)$	(1^{13}) $(1^5, 2^3, 3^5)$ $(1^4, 2^5, 3^4)$ $(1^3, 2^7, 3^3)$ $(1^2, 2^9, 3^2)$ $(1^3, 2^2, 3^3, 4^2, 5^3)$ $(1^2, 2^3, 3^3, 4^3, 5^2)$ $(1^2, 2^2, 3^5, 4^2, 5^2)$
	1	1	2	3	5	8

長さが n の $|x|_N$ は, 長さが $n-2$ の $|x|_N=(1^{a_1}, 2^{a_2}, \dots, m^{a_m})$ を $|x|_N=(1^{a_1+1}, 2^{a_2}, \dots, m^{a_m+1})$ の形にしたもの, および長さが $n-4$ の $|x|_N=(1^{a_1}, 2^{a_2}, \dots, m^{a_m})$ を $|x|_N=(1^2, 2^{a_1}, 3^{a_2}, \dots, (m+1)^{a_m}, (m+2)^2)$ の形にしたものであり, フィボナッチ数をなす. よって, フィボナッチ数である全体の個数に, フィボナッチ数である $(1^{a_1}, 2^{a_2}, \dots, m^{a_m})=(1^{a_m}, 2^{a_{m-1}}, \dots, m^{a_1})$ となる $|x|_N$ の個数を足して 2 で割ると $\#|x|_N$ が得られる. $\square$

4 素な絡み目の実現

第 3 章で得られた $l(x) = n$ の (*) の左辺の表の各 $|x|_N=(1^{a_1}, 2^{a_2}, \dots, m^{a_m})$ に対し, 素な絡み目の最小の格子点表示となる $x=(x_1, x_2, \dots, x_n)$ が少なくとも 1 つ存在するかどうかを $m = 1, 2, 3$ の場合について調べた.

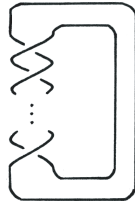
• $m = 1$ のとき

$$|x|_N = (1^{a_1}) \quad (a_1 \geq 2),$$

$$|x| = (1^{a_1}),$$

$$x = (1^{a_1})$$

であるから, このとき $\beta(x)$ は $(2, a_1)$ -トーラス絡み目を表し, 素な絡み目となる.



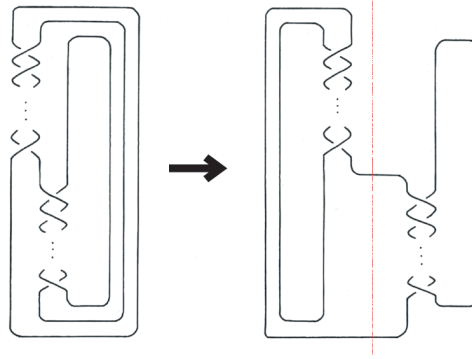
• $m = 2$ のとき

$$|x|_N = (1^{a_1}, 2^{a_2}) \quad (a_1 \geq 2, a_2 \geq 2, a_1 \geq a_2),$$

$$|x| = (1^{a_1}, 2^{a_2}),$$

$$x = (1^{a_1}, -2^{a_2})$$

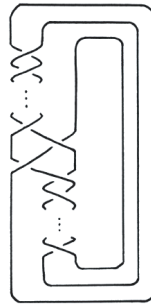
のとき, $\beta(x)$ は下図のように連結和の形を表す. よって, 素な絡み目を表さない.



そこで次に $|x|$, x を以下のようにとる:

$$|x| = (1^{a_1-1}, 2, 1, 2^{a_2-1}),$$

$$x = (1^{a_1-1}, -2, 1, -2^{a_2-1}).$$



連結で素な交代図式を持つ絡み目は素であることが Menasco により示されているので, この絡み目は素である. 次に, この x が最小表示であることを示す. 格子点 $x = (1^{a_1-1}, -2, 1, -2^{a_2-1})$ はブレイド指数が 3 のときの最小表示であるので, これ以上ブレイド指数が下がらないことを示せばよい. ブレイド指数が 2 のもので交差点の数が $a_1 + a_2$ となるものを考える. それぞれの a_1, a_2 の偶奇に対して成分数は以下ようになる.

ブレイド指数 3			ブレイド指数 2	
a_1	a_2	成分数	$a_1 + a_2$	成分数
偶数	偶数	1	偶数	2
偶数	奇数	2	奇数	1
奇数	偶数	2	奇数	1
奇数	奇数	1	偶数	2

全ての場合において成分数が一致しないのでブレイド指数は下がらず, よって $|x|_N = (1^{a_1}, 2^{a_2})$ のときにも素な絡み目の最小の格子点表示となる x が少なくとも 1 つ存在する.

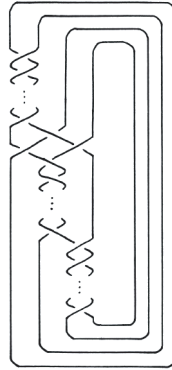
• $m = 3$ のとき

$$|x|_N = (1^{a_1}, 2^{a_2}, 3^{a_3}) \quad (a_1 \geq 2, a_2 \geq 2, a_3 \geq 2, a_1 \geq a_3),$$

$$|x| = (1^{a_1-1}, 2, 1, 3, 2^{a_2-1}, 3^{a_3-1}),$$

$$x = (1^{a_1-1}, -2, 1, 3, -2^{a_2-1}, 3^{a_3-1})$$

のとき, $\beta(x)$ は下図のような絡み目であり, 素な絡み目となる.



同様にこの絡み目のブレイド指数がこれ以上下がらないことを示す。ブレイド指数が 2, 3 で交差点の数が $a_1 + a_2 + a_3$ となる絡み目の成分数は以下の表のようになる。

ブレイド指数 4					ブレイド指数 3	ブレイド指数 2
a_1	a_2	a_3	成分数	$a_1 + a_2 + a_3$	成分数	
偶数	偶数	偶数	2	偶数	1 or 3	2
偶数	偶数	奇数	1	奇数	2	1
偶数	奇数	偶数	3	奇数	2	1
偶数	奇数	奇数	2	偶数	1 or 3	2
奇数	偶数	偶数	1	奇数	2	1
奇数	偶数	奇数	2	偶数	1 or 3	2
奇数	奇数	偶数	2	偶数	1 or 3	2
奇数	奇数	奇数	1	奇数	2	1

絡み目の向きが上から下へと固定されていてブレイド指数が決定しているので、交差符号和は絡み目の不変量である。ブレイド指数 3 の絡み目とは成分数が一致せず、またブレイド指数 2 の絡み目と成分数が 2 で一致する場合は、絡み数が一致しない。ブレイド指数が 2 の絡み目と成分数が 1 で一致する場合は、交差符号和が一致しない。よって、ブレイド指数はこれ以上下がらないことが言えた。以上より $|x|_N = (1^{a_1}, 2^{a_2}, 3^{a_3})$ のときも素な絡み目の最小な格子点表示となる x が少なくとも 1 つ存在する。

謝辞

研究集会「結び目の数学 IV」において、講演の機会を与えて下さった大山淑之先生、新國亮先生に心より感謝致します。また、講演をご清聴頂き、アドバイスをくださった参加者の皆様、どうもありがとうございました。

参考文献

- [1] 河内明夫, レクチャー結び目理論, 共立出版 (2007).
- [2] A. Kawauchi and I. Tayama, Enumerating prime links by a canonical order, Journal of Knot Theory and Its Ramifications, Vol. 15, No. 2 (2006), 217-237.