

カンドルを利用した絡み目ホモトピー類の分類に向けて

東京工業大学大学院情報理工学研究科 井上 歩[†]

1. はじめに

絡み目ホモトピーとは、アンビエントイソトピーおよび自己交差交換（図 1 参照）による、向き付け・番号付けられた絡み目の変形である。この変形を法として絡み目を分類したい。N. Habegger と X. S. Lin [4] は、二つの絡み目が絡み目ホモトピー同値か否かを判定するアルゴリズムを与えている。よって、分類問題はすでに解決されているとも思える。しかし、絡み目ホモトピー類の代表元をすべて列挙（すなわちテーブルを作成）しようとするとき、これだけではまだ不十分である。そこで不変量による分類を考えたい。



図 1

現状、実際に計算・比較が容易な絡み目ホモトピー不変量は Milnor 不変量 ($\bar{\mu}$ 不変量) [8, 9] を除いて他にない¹。J. Milnor により導入されたこの不変量は、絡み数を一般化するものであり、3 成分以下の絡み目ホモトピー類を完全に分類する [9]。また J. P. Levine [7] は Milnor 不変量をある意味で詳細化し、これを用いて 4 成分の絡み目ホモトピー類に完全分類を与えている。しかし、5 成分以上の（計算・比較が容易な）不変量による完全分類は未解決である。

計算・比較の容易性を考慮すれば、不変量は数値型が望ましい。本稿では、数値型不変量を大量に与える一つの方法として、カンドルコサイクル不変量 [1] に次のような制約を与えれば、これが絡み目ホモトピー不変になることを紹介する（定理 3.3）。

- 彩色に「準自明」なカンドル（定義 3.1）を用いる
- 2 コサイクルに「条件 (C3)」(3 章参照) を課す

一つの応用として、このカンドルコサイクル不変量を用いることで、絡み目の各成分が絡み目ホモトピーで自明か否かを判定することができる（定理 4.3）。

[†] 本研究は科研費（研究活動スタート支援 課題番号：23840014）の助成を受けている。

¹ 簡約結び目群（絡み目群） [4, 8] や 簡約結び目カンドル [5]（4 章参照）なども不変量であるが、比較は容易ではない。また J. E. P. P. de Campos [2] は完全不変量を与えているが、これは可換図式に値をとり、計算・比較は容易ではない。

2. カンドルコサイクル不変量の復習

まず始めに、用語を定義しながら、カンドルコサイクル不変量を簡単に復習する。

定義 2.1 (カンドル). 集合 X に次の公理を満たす二項演算 $*$: $X \times X \rightarrow X$ を与えたものをカンドルと呼ぶ:

- (Q1) $\forall x \in X, x * x = x$.
- (Q2) $\forall x \in X, *x : X \rightarrow X (\bullet \mapsto \bullet * x)$ は全単射.
- (Q3) $\forall x, y, z \in X, (x * y) * z = (x * z) * (y * z)$.

カンドルに対しても演算を保つ写像として準同型写像が定義できる. カンドル X の自己同型写像全体がなす集合には, 写像の合成により自然に群構造が定まる. この群を $\text{Aut}(X)$ と書き, X の**自己同型群**と呼ぶ. カンドルの公理 (Q2) および (Q3) により, 任意の $x \in X$ に対して $*x : X \rightarrow X$ は自己同型写像である. これらが生成する $\text{Aut}(X)$ の (正規) 部分群を $\text{Inn}(X)$ と書き, X の**内部自己同型群**と呼ぶ.

定義 2.2 (彩色). X をカンドルとし, L を向き付けられた絡み目とする. L の図式の X **彩色**とは, 図式の各弧への X の元の割り当てであり, 各交点において図2の条件を満たすものである.

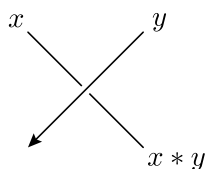


図 2

カンドルの公理 (Q1) ~ (Q3) は, 図式を Reidemeister 変形しても X 彩色全体の集合に 1 : 1 対応が付けられることを保証する (図3参照). すなわち絡み目に対して, その図式の X 彩色の総数は一定であり, 絡み目の不変量である. これを X **彩色数** と呼ぶ.

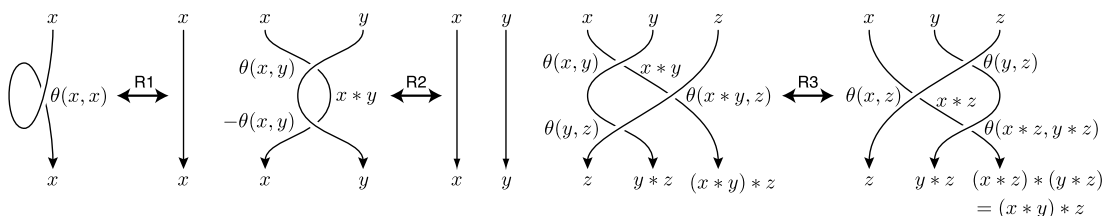


図 3

X 彩色はさらに2コサイクルを用いて次のように重み付けることができる.

定義 2.3 (2 コサイクル). X をカンドルとし, A を Abel 群とする. 写像 $\theta: X \times X \rightarrow A$ が次の条件を満たすとき, これを **2 コサイクル**と呼ぶ:

$$(C1) \quad \forall x \in X, \theta(x, x) = 0.$$

$$(C2) \quad \forall x, y, z \in X, \theta(x, y) + \theta(x * y, z) = \theta(x, z) + \theta(x * z, y * z).$$

定義 2.4 (彩色の重み). X をカンドル, A を Abel 群, $\theta: X \times X \rightarrow A$ を 2 コサイクルとする. 絡み目図式の X 彩色 $\mathcal{C}$ に対し, 和

$$\sum_c \text{sign}(c) \cdot \theta(x, y) \in A$$

を θ による $\mathcal{C}$ の**重み**と呼ぶ. ここで c は図式の各交点を, $\text{sign}(c) \in \{\pm 1\}$ はその符号を表し, $x, y \in X$ は図 2 の交点を c として定める.

2 コサイクルの条件 (C1), (C2) は, 図式を Reidemeister 変形しても彩色の重みが変わらないことを保証する (図 3 参照). よって次の定理が成り立つ.

定理 2.5 ([1]). X をカンドル, A を Abel 群, $\theta: X \times X \rightarrow A$ を 2 コサイクルとする. このとき向き付けられた絡み目 L に対して, 多重集合

$$\Phi_\theta(L) = \{(\theta \text{ による } \mathcal{C} \text{ の重み}) \in A \mid \mathcal{C}: L \text{ の図式の } X \text{ 彩色}\}$$

が図式の選び方に依らず一意に定まる.

この多重集合 $\Phi_\theta(L)$ を, θ が定める L の**カンドルコサイクル不変量**と呼ぶ.

3. 絡み目ホモトピー不変なカンドルコサイクル不変量

一般に彩色全体の集合は, (自己) 交差交換によって対応性を失う. つまり彩色数やカンドルコサイクル不変量は一般に絡み目ホモトピー不変ではない. しかし彩色に用いるカンドルに次のような制約を課すことで, 彩色数を絡み目ホモトピー不変にすることができる.

定義 3.1 (カンドルの準自明性). カンドル X が次の条件を満たすとき, X は**準自明**であると呼ぶ:

$$(QT) \quad \forall x \in X, \forall \varphi \in \text{Inn}(X), x * \varphi(x) = x.$$

補題 3.2. 準自明なカンドルによる彩色数は, 絡み目ホモトピーで不変である.

証明. X を準自明なカンドルとすると, 図式を自己交差交換で変形しても, X 彩色全体の集合に 1:1 対応が付けられることを示せば良い.

図 2 を交差交換を行う自己交差とする. このとき仮定から, ある $\varphi \in \text{Inn}(X)$ が存在して $y = \varphi(x)$ が成り立つ (図 4 左参照). よって $x * y = x * \varphi(x) = x$ である. また $x = \varphi^{-1}(y)$ だから, $y * x = y * \varphi^{-1}(y) = y$ である.

以上より, この自己交差の彩色は自己交差交換で変化しないことが分かる (図 4 右参照). よって X 彩色全体の集合に 1:1 対応が付けられる. $\square$

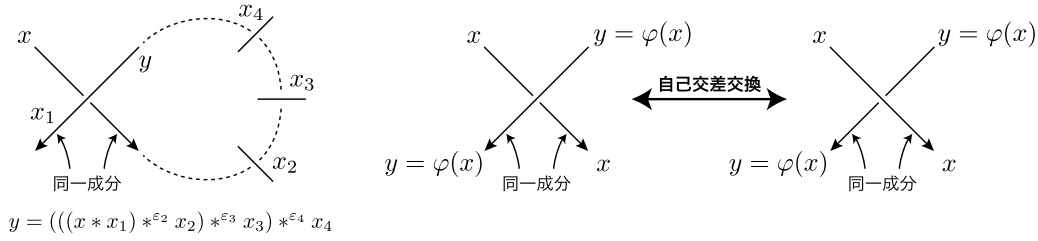


図 4

X を準自明なカンドル, A を Abel 群, $\theta : X \times X \rightarrow A$ を 2 コサイクルとする. 前述の通り X 彩色数は自己交差交換で不変であるが, 図 5 から分かる通り, θ による X 彩色の重みは一般に自己交差交換で不変ではない. しかし自己交差の重みへの寄与を 0 にすれば, 彩色の重みは自己交差交換で不変となる. そのためには 2 コサイクル θ に対して次の条件を課せば良い:

$$(C3) \quad \forall x \in X, \forall \varphi \in \text{Inn}(X), \theta(x, \varphi(x)) = 0.$$

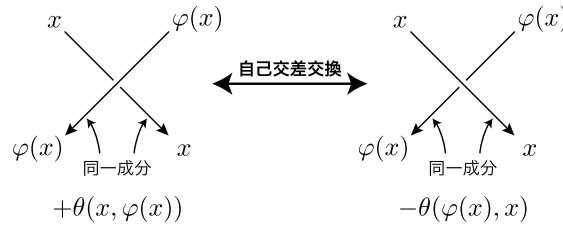


図 5

これまでの議論により, 明らかに次の定理が成り立つ.

定理 3.3. X を準自明なカンドル, A を Abel 群とし, $\theta : X \times X \rightarrow A$ を条件 (C3) を満たす 2 コサイクルとする. このとき θ が定めるカンドルコサイクル不変量は, 絡み目ホモトピーで不変である.

このカンドルコサイクル不変量を用いることで, 例えば Borromean rings が自明な 3 成分絡み目に絡み目ホモトピックではないことを, 以下のように示すことができる.

例 3.4. 準自明カンドル X を表 (A) で, その条件 (C3) を満たす 2 コサイクル $\theta : X \times X \rightarrow \mathbb{Z}_2$ を表 (B) でそれぞれ定める². このとき Borromean rings L_1 と自明な 3 成分絡み目 L_2 に対して, θ が定めるカンドルコサイクル不変量を計算すると

$$\Phi_{\theta}(L_1) = \{0 \text{ (1344 個)}, 1 \text{ (384 個)}\}, \quad \Phi_{\theta}(L_2) = \{0 \text{ (1728 個)}\}.$$

よって Borromean rings は自明な 3 成分絡み目に絡み目ホモトピックではない.

²表 (A) において $[i+1, j+1]$ 成分は $([i+1, 1] \text{ 成分}) * ([1, j+1] \text{ 成分})$ の値を表す. 表 (B) において $[i+1, j+1]$ 成分は $\theta([i+1, 1] \text{ 成分}, [1, j+1] \text{ 成分})$ の値を表す.

注意. 例 3.4 において L_1 と L_2 の X 彩色数は一致する. すなわち X 彩色数だけでは Borromean rings と自明な 3 成分絡み目とが絡み目ホモトピックではないことを示せない.

(A)

*	a_1	a_2	a_3	a_4	b_1	b_2	b_3	b_4	c_1	c_2	c_3	c_4
a_1	a_1	a_1	a_1	a_1	a_2	a_2	a_2	a_2	a_3	a_3	a_3	a_3
a_2	a_2	a_2	a_2	a_2	a_1	a_1	a_1	a_1	a_4	a_4	a_4	a_4
a_3	a_3	a_3	a_3	a_3	a_4	a_4	a_4	a_4	a_1	a_1	a_1	a_1
a_4	a_4	a_4	a_4	a_4	a_3	a_3	a_3	a_3	a_2	a_2	a_2	a_2
b_1	b_3	b_3	b_3	b_3	b_1	b_1	b_1	b_1	b_2	b_2	b_2	b_2
b_2	b_4	b_4	b_4	b_4	b_2	b_2	b_2	b_2	b_1	b_1	b_1	b_1
b_3	b_1	b_1	b_1	b_1	b_3	b_3	b_3	b_3	b_4	b_4	b_4	b_4
b_4	b_2	b_2	b_2	b_2	b_4	b_4	b_4	b_4	b_3	b_3	b_3	b_3
c_1	c_2	c_2	c_2	c_2	c_3	c_3	c_3	c_3	c_1	c_1	c_1	c_1
c_2	c_1	c_1	c_1	c_1	c_4	c_4	c_4	c_4	c_2	c_2	c_2	c_2
c_3	c_4	c_4	c_4	c_4	c_1	c_1	c_1	c_1	c_3	c_3	c_3	c_3
c_4	c_3	c_3	c_3	c_3	c_2	c_2	c_2	c_2	c_4	c_4	c_4	c_4

(B)

θ	a_1	a_2	a_3	a_4	b_1	b_2	b_3	b_4	c_1	c_2	c_3	c_4
a_1	0	0	0	0	1	0	1	0	1	1	0	0
a_2	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	1	1
a_3	0	0	0	0	1	0	1	0	1	1	0	0
a_4	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	1	1
b_1	1	1	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0
b_2	0	0	1	1	0	0	0	0	0	1	0	1
b_3	1	1	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0
b_4	0	0	1	1	0	0	0	0	0	1	0	1
c_1	1	0	1	0	1	1	0	0	0	0	0	0
c_2	0	1	0	1	0	0	1	1	0	0	0	0
c_3	1	0	1	0	1	1	0	0	0	0	0	0
c_4	0	1	0	1	0	0	1	1	0	0	0	0

4. 代数的考察

最後に, 3 章で構成した絡み目ホモトピー不変なカンドルコサイクル不変量を用いて, 絡み目ホモトピーで自明／非自明な成分が検出できることを簡単に紹介する. そのためにまず, 彩色およびその重みの代数的な意味を確認しておく.

$D \subset \mathbb{C}$ を向き付けられた単位円板, $R = D \cup \{z \in \mathbb{C} \mid 1 \leq z \leq 5\}$ とする. 向き付けられた絡み目 L に対し, 次の条件を満たす連続写像 $\mu: R \rightarrow S^3$ を考え, これを L のラケットと呼ぶ (図 6 左参照):

- $p \in S^3 \setminus L$ を固定して, $\mu(5) = p$.
- 制限写像 $\mu|_D: D \rightarrow S^3$ は埋め込み.
- L は $\text{Im } \mu$ と点 $\mu(0)$ でのみ横断的に交わり, その交わり数は $+1$.

L のラケットのホモトピー類全体を $Q(L)$ で表し、ラケット μ, ν の積 $\mu * \nu$ を図6右のように定義すると、 $(Q(L), *)$ はカンドルになる。このカンドル $Q(L)$ を L の結び目カンドルと呼ぶ [6]。構成より明らかに結び目カンドルは絡み目の不変量である。

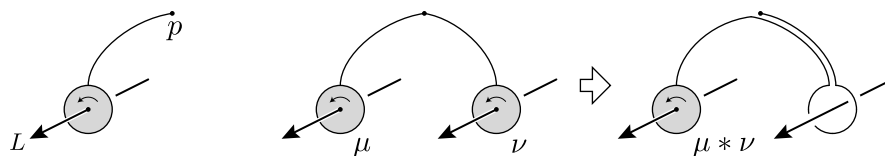


図 6

カンドルに対しては (コ) ホモロジーが定義でき [1]、特に結び目カンドルの 2次元ホモロジー群には、絡み目の各成分 K_i に付随して基本類 $[K_i]$ が定まる。実は、絡み目 L の図式のカンドル X による彩色とは準同型写像 $f: Q(L) \rightarrow X$ に他ならず、2 コサイクル $\theta: X \times X \rightarrow A$ によるその重みとは Kronecker 積 $\sum_{i=1}^n \langle [\theta], f_*([K_i]) \rangle$ に他ならない。ここで n は L の成分数を表し、 $[\theta]$ は θ が代表する X の A 係数 2次元コホモロジー類を、 f_* は f が誘導する 2次元ホモロジー群の間の準同型写像を表す。よってカンドルコサイクル不変量の限界は $Q(L)$ の 2次元ホモロジー群が定めるが、M. Eisermann [3] は次を示している。

定理 4.1 ([3]). 絡み目カンドルの 2次元ホモロジー群は、非自明な成分に付随する基本類たちにより自由生成される。

この定理より、カンドルコサイクル不変量が絡み目の各成分の自明／非自明性を判定することが分かる。

結び目カンドルは絡み目ホモトピーで不変ではない。しかし次のような商を考えると、これは絡み目ホモトピーで不変となる [5]。

定義 4.2 (簡約結び目カンドル [5]). L を向き付けられた絡み目とし、 $Q(L)$ をその結び目カンドルとする。 $Q(L)$ をさらに図7の変形で割った集合を $RQ(L)$ とすると、 $(RQ(L), *)$ は再びカンドルとなる。このカンドル $RQ(L)$ を L の簡約結び目カンドルと呼ぶ³。

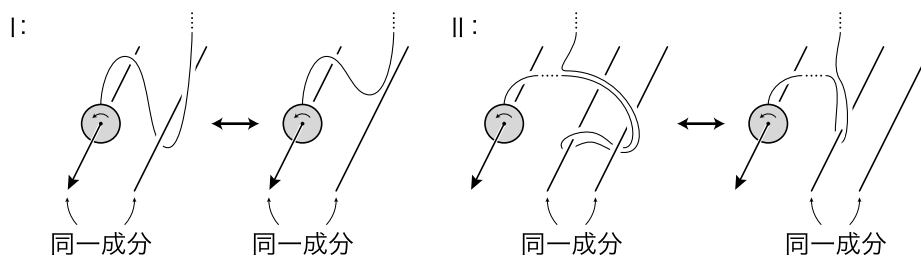


図 7

³筆者も同様のカンドルを定義していたが、発表は間に合わなかった。

簡約結び目カンドルは結び目カンドルの準自明化である。よって簡約結び目カンドルからの非自明な準同型写像を許容するカンドルは、準自明でなければならない。準自明カンドル X による絡み目 L の図式の彩色は、準同型写像 $f: RQ(L) \rightarrow X$ に他ならない。

簡約結び目カンドル $RQ(L)$ の2次元ホモロジー群には、基本類が well-defined には定まらない。しかし、準自明カンドル X の2次元鎖複体をさらに

$$(C3') \quad (x, \varphi(x)) = 0 \quad (x \in X, \varphi \in \text{Inn}(X))$$

という関係で割って2次元ホモロジー群を修正することで、 $RQ(L)$ の基本類 $[K_i]$ を well-defined に定めることができる。2コサイクル $\theta: X \times X \rightarrow A$ に課した条件 (C3) はこの修正鎖複体が定める2次元コホモロジー群の代表元となるための条件であり、やはり X 彩色の θ による重みとは Kronecker 積 $\sum_{i=1}^n \langle [\theta], f_*([K_i]) \rangle$ に他ならない。証明は割愛するが、定理 4.1 と同様に次を示すことができる。

定理 4.3. 簡約結び目カンドルの修正2次元ホモロジー群は、絡み目ホモトピーで非自明な成分に付随する基本類たちにより（自由とは限らず）生成される。

この定理より、3章で構成したカンドルコサイクル不変量が絡み目の各成分の自明／非自明性を絡み目ホモトピーを除いて判定することが分かる。

参考文献

1. J. S. Carter, D. Jelsovsky, S. Kamada, L. Langford and M. Saito, *Quandle cohomology and state-sum invariants of knotted curves and surfaces*, Trans. Amer. Math. Soc. **355** (2003), no. 10, 3947–3989.
2. J. E. P. P. de Campos, *Distinguishing links up to link-homotopy by algebraic methods*, Topology Appl. **157** (2010), no. 3, 605–614.
3. M. Eisermann, *Homological characterization of the unknot*, J. Pure Appl. Algebra **177** (2003), 131–157.
4. N. Habegger and X. S. Lin, *The classification of links up to link-homotopy*, J. Amer. Math. Soc. **3** (1990), no. 2, 389–419.
5. J. R. Hughes, *Link homotopy invariant quandles*, J. Knot Theory Ramifications **20** (2011), no. 5, 763–773.
6. D. Joyce, *A classifying invariant of knots, the knot quandle*, J. Pure Appl. Algebra **23** (1982), no. 1, 37–65.
7. J. P. Levine, *An approach to homotopy classification of links*, Trans. Amer. Math. Soc. **306** (1988), no. 1, 361–387.
8. J. Milnor, *Link groups*, Ann. of Math. **59** (1954), 177–195.
9. J. Milnor, *Isotopy of links*, Algebraic geometry and topology (A symposium in honor of S. Lefschetz), Princeton Univ. Press, Princeton, N. J., 1957, 280–306.

E-mail address: ayumu.inoue@math.titech.ac.jp