

# Interpretations of rack coloring knot invariants in terms of quandles

谷口 裕麻 (東京学芸大学 M2)

## 概要

Nelson 氏が, 枠付き結び目 (絡み目) に対するラック彩色数と呼ばれる不変量を, ひねり数を固定した結び目 (絡み目) の不変量と見て, 新たに結び目の不変量を定義した. これをカンドルサイクル不変量を用いて表すことができたので紹介する.

## 1 準備

集合  $R$  と, その二項演算  $*$  の組が次の 2 つの条件を満たすとき, ラック という. (Fenn-Rourke [3])

(R1)  $R$  の任意の元  $a, b$  に対して  $c * a = b$  を満たす  $R$  の元  $c$  が一意的に存在する.

(R2)  $R$  の任意の元  $a, b, c$  に対して  $(a * b) * c = (a * c) * (b * c)$  が成り立つ.

また, 集合  $Q$  と, その二項演算  $*$  の組がラックであり,  $Q$  の任意の元  $a$  に対して  $a * a = a$  が成り立つとき, カンドル という. (Joyce [4], Matveev [6])

有向結び目  $K$  とは, 滑らかな埋め込み  $K : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^3$  である.  $N_K$  を  $K(\mathbb{S}^1)$  の管状近傍とする.  $K$  の枠  $F$  を, 滑らかな埋め込み  $F : \mathbb{S}^1 \rightarrow \partial N_K$  のうち  $N_K$  内で  $K$  とホモトピックとなるものとする. このとき, 有向枠付き結び目を有向結び目  $K$  と,  $K$  の枠  $F$  の組  $(K, F)$  と定義する. ここで,  $(K, F)$  と  $(K', F')$  が同じ有向枠付き結び目であることと,  $K$  と  $K'$  が同じ有向結び目であり, かつ  $lk(K, F) = lk(K', F') \pmod{\mathbb{Z}}$  を満たすことは同値であることが知られている. そこで有向枠付き結び目を,  $(K, F)$  の代わりに  $K$  と,  $lk(K, F)$  の代わりとなる整数  $w$  の組  $(K, w)$  と書くことにする. 今後, 有向結び目  $K$  と書いたとき, これは  $K(\mathbb{S}^1)$  もしくは, 結び目型を表すものとする.

定義 1.1.  $R$  を有限ラック,  $(K, w)$  を有向枠付き結び目,  $(D, w)$  をひねり数が  $w$  の  $K$  の図式とする. このとき  $(D, w)$  の弧の集合から  $R$  への写像  $\mathcal{C}$  のうち, 各交差点で次の等式  $(*)$  を満たすものを ラック彩色 という.

また, このラック彩色の集合を  $\text{Col}_R(D, w)$  で表す. この集合は, 有限ラックを用いていることから, 有限集合となる. ラック彩色数 を  $|\text{Col}_R(D, w)|$  で定義すると, この値は  $(K, w)$  の不変量である.

$$\begin{array}{c} | \\ a^{\tau_3} \\ | \\ \xrightarrow{a^{\tau_2}} \\ | \\ a^{\tau_1} \end{array}$$

$$(*) \mathcal{C}(a^{\tau_1}) * \mathcal{C}(a^{\tau_2}) = \mathcal{C}(a^{\tau_3})$$

定義 1.2.  $Q$  を有限カンドル,  $K$  を有向結び目,  $D$  を  $K$  の図式とする. このとき  $D$  の弧全体から  $Q$  への写像  $\mathcal{C}$  のうち, 各交差点で次の等式  $(*)$  を満たすものを カンドル彩色 という.

また, このカンドル彩色の集合を  $\text{Col}_Q(D)$  で表す. この集合は, 有限カンドルを用いていることから, 有限集合となる. カンドル彩色数 を  $|\text{Col}_Q(D)|$  で定義すると, この値は  $K$  の不変量である.

$$\begin{array}{c} | \\ a^{\tau_3} \\ | \\ \xrightarrow{a^{\tau_2}} \\ | \\ a^{\tau_1} \end{array}$$

$$(*) \mathcal{C}(a^{\tau_1}) * \mathcal{C}(a^{\tau_2}) = \mathcal{C}(a^{\tau_3})$$

有限ラック, 有限カンドルに対してラック (コ) ホモロジー, カンドル (コ) ホモロジーが Carter–Jelsovsky–Kamada–Langford–Saito [1] によって導入され, カンドルコホモロジーの 2 コサイクルを用いるカンドルコサイクル不変量と呼ばれる結び目 (絡み目) の不変量が定義されている. ここで  $R$  をラック,  $A$  をアーベル群として,  $\phi: R \times R \rightarrow A$  がラック 2 コサイクルであることと,

$$\phi(x, z) + \phi(x * z, y * z) = \phi(x * y, z) + \phi(x, y) \quad (\forall x, y, z \in R)$$

を満たすことは同値である. また,  $Q$  をカンドル,  $A$  をアーベル群として,  $\phi: Q \times Q \rightarrow A$  がカンドル 2 コサイクルであることと, ラック 2 コサイクルであり, かつ

$$\phi(x, x) = 0 \quad (\forall x \in Q)$$

を満たすことは同値である.

カンドル 2 コサイクルは本来  $\mathbb{Z}[A]$  上に値を持つ不変量である. ここで,  $A = \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$  のとき  $\mathbb{Z}[A] \cong \mathbb{Z}[t, t^{-1}]/(t^N - 1)$  である. 本稿では,  $A = \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$  のときのみを扱うので, カンドルコサイクル不変量を以下のように  $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]/(t^N - 1)$  に値を持つ不変量として定義する.

定義 1.3.  $Q$  をカンドル,  $\phi: Q \times Q \rightarrow \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$  をカンドル 2 コサイクル,  $K$  を有向結び目,  $D$  を  $K$  の図式,  $\mathcal{C}$  を  $\text{Col}_Q(K)$  の元とする. また  $\mathcal{T}$  を  $D$  の交差点の集合とし,  $\tau \in \mathcal{T}$  を図 3 のような交差点とする. そして,  $\text{sign}(\tau)$  を  $\tau$  が正の交差のとき 1, 負の交差のとき  $-1$  の値を取るものとする.

このとき,  $\mathcal{C}$  の重さ  $W(\mathcal{C})$  ( $\in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ ) を次で定義する.

$$W(\mathcal{C}) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\tau \in \mathcal{T}} \text{sign}(\tau) \phi(\mathcal{C}(a^{\tau_1}), \mathcal{C}(a^{\tau_2}))$$

また,  $\phi$  による  $K$  の カンドルコサイクル不変量  $\Phi_\phi(K)$  ( $\in \mathbb{Z}[t, t^{-1}]/(t^N - 1)$ ) を次で定義する.

$$\Phi_\phi(K) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\mathcal{C} \in \text{Col}_Q(K)} t^{W(\mathcal{C})}$$

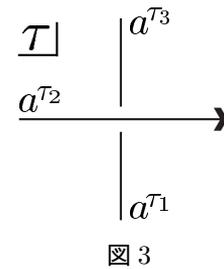


図 3

## 2 ラック彩色数を用いた不変量

ラック彩色数  $|\text{Col}_R(K, w)|$  は, 有向枠付き結び目  $(K, w)$  の不変量として定義したが, 見方を変えるとひねり数  $w$  を固定した有向結び目  $K$  の不変量と考えることができる. 従って, 多項式  $\sum_{w \in \mathbb{Z}} |\text{Col}_R(K, w)| t^w$  は  $K$  の不変量であることがわかる.

一方, Nelson 氏が [7] において  $|\text{Col}_R(K, w)|$  は  $w$  について周期性があることに気付き, 上の多項式不変量の本質的な情報を取り出した不変量  $PR(K, R)$  を紹介している. これを定義するため準備をする. また, ここでの定義は [7] とは異なっているが, 本質的には同じである.

定義 2.1.  $R$  をラックとする. このとき写像  $\iota: R \rightarrow R$  を  $R$  の任意の元  $x$  に対して  $\iota(x) * x = x$  を満たす写像と定義する.

写像  $\iota$  が well-defined であることは, ラックの定義 (R1) より確認できる. 次の補題 2.2, 補題 2.3 は  $\iota$  の性質である.

補題 2.2.  $R$  をラックとする. このとき  $R$  の任意の元  $x, y$  に対して  $y * x = y * \iota(x)$ ,  $\iota(y) * x = \iota(y * x)$  が成り立つ.

補題 2.3.  $\iota$  は全単射である .

定義 2.4.  $R$  の ラックランク  $N$  を  $\min\{n \in \mathbb{N} | \iota^n = id_R\}$  と定義する .

ラックランクが well-defined であることは ,  $\iota$  が全単射であることからわかる .

定理 2.5.  $R$  をラックランク  $N$  をもつ有限ラックとする . このとき  $|\text{Col}_R(K, w)| = |\text{Col}_R(K, w + N)|$  である .

証明. 図 4 の右の図式は , 各交差点においてラック彩色が満たすべき条件を満たしている .

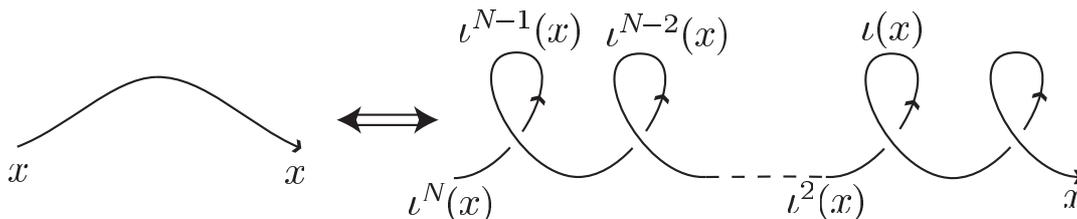


図 4

図 4 のような図式の局所変形を考えると , 左から右の変形で  $\text{Col}_R(K, w)$  から  $\text{Col}_R(K, w + N)$  への写像を作ることができる . さらに右から左の変形で逆写像を作ることができ , 証明が得られる .  $\square$

この定理から ,  $\sum_{w \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}} |\text{Col}_R(K, w)| t^w$  が  $\sum_{w \in \mathbb{Z}} |\text{Col}_R(K, w)| t^w$  の本質的な情報を持っていることがわかる . 従って , 有向枠付き結び目の不変量であるラック彩色を用いて , 有向結び目の不変量  $PR(K, R)$  を次のように定義する .

定義 2.6 (Nelson [7]).  $K$  を有向結び目 ,  $R$  を有限ラックとする . このとき , 有向結び目の不変量  $PR(K, R)$  を次のように定義する . (ここで  $PR$  は *polynomial rack counting invariant* の頭文字である .)

$$PR(K, R) \stackrel{def}{=} \sum_{w \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}} |\text{Col}_R(K, w)| t^w$$

### 3 $PR(K, R)$ のカンドルコサイクル不変量による解釈

ラックを用いた結び目の不変量  $PR(K, R)$  が , どのような不変量であるかを考える中で , この不変量をカンドルを用いて表せることがわかった . もう少し詳しく述べると , “ある条件” を満たすラックランク  $N$  のラック  $R$  から , “カンドル  $Q$ ” と “ $Q$  のカンドル 2 コサイクル  $\phi$ ” が誘導され , この  $\phi$  を用いて作ったカンドルコサイクル不変量  $\Phi_\phi(K)$  が  $PR(K, R)$  と次のような関係にあることがわかった . .

$$PR(K, R) = N\Phi_\phi(K)$$

#### 3.1 $R$ から誘導されるカンドル $Q$

定義 3.1.  $R$  を有限ラック , 写像  $\iota : R \rightarrow R$  を ,  $R$  の任意の元  $x$  に対して  $\iota(x) * x = x$  を満たす写像とする . このとき , 次の二項関係  $\sim$  は同値関係である .

$$x \sim y \stackrel{def}{\iff} \iota^i(x) = y \quad (x, y \in R, \exists i \in \mathbb{Z})$$

これは,  $\iota$  が全単射であることからすぐにわかる.

**定理 3.2.**  $(R, *)$  を有限ラックとする. このとき, 商集合  $R/\simeq = Q$  に対して, 演算  $\triangleright$  を  $[x] \triangleright [y] \stackrel{def}{=} [x*y]$  ( $\forall [x], [y] \in Q$ ) として定義すると  $(Q, \triangleright)$  はカンドルになる. また  $Q$  を  $R$  から誘導されたカンドルと呼ぶ.

**証明.** 演算  $\triangleright$  は補題 2.2 より well-defined であることがわかる. また,  $Q$  がラックになることは明らかである. ここで  $\iota(x) * x = x$  より  $[x] \triangleright [x] = [x]$  が成り立ち,  $Q$  がカンドルであることがわかる.  $\square$

### 3.2 ラック拡大とラック 2 コサイクル

次に,  $R$  の制限と  $R$  から誘導されるカンドル 2 コサイクル  $\phi$  を紹介するために準備をする.

Eisermann 氏は [2] において, カンドル拡大を定義している. これは群における群拡大と似た概念である. またカンドル拡大はカンドル 2 コサイクルとの間に関係があることが知られている. また, 木村康人氏は [5] において, カンドル拡大をラックについて拡張したラック拡大を定義している. ここでは, ラック拡大とラック 2 コサイクルの関係を復習する.

**定義 3.3.**  $\tilde{R}, R$  をラックとする. 全射な写像  $\pi: \tilde{R} \rightarrow R$  が次を満たすとき  $R$  の被覆写像 と定義する.

$$\begin{aligned}\pi(x * y) &= \pi(x) * \pi(y) \quad (\forall x, y \in \tilde{R}) \\ \pi(x) = \pi(y) &\Rightarrow z * x = z * y \quad (x, y \in \tilde{R}, \forall z \in \tilde{R})\end{aligned}$$

**定義 3.4.**  $A$  をアーベル群,  $\pi: \tilde{R} \rightarrow R$  を  $R$  の被覆写像とし,  $A$  による  $\tilde{R}$  の作用  $A \curvearrowright \tilde{R}$  が定義されているとする. このとき, 被覆写像  $\pi$  と作用  $A \curvearrowright \tilde{R}$  の組が次を満たすとき, この組を  $A$  の作用による  $R$  のラック拡大 と呼び,  $E: A \curvearrowright \tilde{R} \xrightarrow{\pi} R$  と表す.

- (E1)  $\lambda x * y = \lambda(x * y)$  ( $\forall \lambda \in A, \forall x, y \in \tilde{R}$ )
- (E2)  $x * \lambda y = x * y$  ( $\forall \lambda \in A, \forall x, y \in \tilde{R}$ )
- (E3)  $A$  の作用が  $\pi^{-1}(a)$  ( $a \in R$ ) 上で推移的かつ自由.

**命題 3.5.**  $E: A \curvearrowright \tilde{R} \xrightarrow{\pi} R$  に対して, 写像  $s: R \rightarrow \tilde{R}$  を  $\pi \circ s$  が恒等写像になるように取る. このとき, 次の条件を満たすような  $\sigma: R \times R \rightarrow A$  が唯一つ決まり,  $\sigma$  がラック 2 コサイクルである.

$$s(a) * s(b) = \sigma(a, b)s(a * b)$$

**証明.** 唯一つ決まることは,  $A$  の作用が  $\pi^{-1}(a)$  ( $a \in R$ ) 上で自由であることからわかる. また,

$$\begin{aligned}(s(a) * s(b)) * s(c) &= \sigma(a * b, c)\sigma(a, b)s((a * b) * c) \\ (s(a) * s(c)) * (s(b) * s(c)) &= \sigma(a, c)\sigma(a * c, b * c)s((a * c) * (b * c))\end{aligned}$$

より,  $\sigma(a * b, c)\sigma(a, b) = \sigma(a, c)\sigma(a * c, b * c)$  が成り立つ. 従って,  $\sigma$  はラック 2 コサイクルである.  $\square$

### 3.3 $R$ の制限と $R$ から誘導されるカンドル 2 コサイクル $\phi$

**命題 3.6.**  $R$  を有限ラック,  $Q$  を  $R$  から誘導されたカンドル,  $\pi: R \rightarrow Q (= R/\simeq)$  を射影とする. ここで,  $R$  が

$$|\pi^{-1}(x)| = N \quad (\forall x \in Q)$$

という条件を満たすとき,  $\pi$  は  $Q$  の被覆写像である. さらに,

$$\mathbb{Z}/N\mathbb{Z} \curvearrowright R \rightarrow R; \lambda a \mapsto \iota^\lambda(a)$$

で作用  $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z} \curvearrowright R$  を定義すると, 作用  $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z} \curvearrowright R$  と被覆写像  $\pi$  の組はラック拡大である.

また,  $\pi \circ s = id_Q$  を満たす写像  $s: Q \rightarrow R$  を一つとり, 命題 3.5 から得られるラック 2 コサイクルを  $\sigma$  とすると,  $R$  の任意の元  $x$  に対して  $\sigma(x, x) = -1$  が成り立ち,  $\phi: Q \times Q \rightarrow \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$  を

$$\phi(x, y) \stackrel{def}{=} \sigma(x, y) + 1$$

と定義すると,  $\phi$  は  $Q$  のカンドル 2 コサイクルになる. これを  $R$  から誘導されたカンドル 2 コサイクル と呼ぶ.

証明.  $\pi$  が  $Q$  の被覆写像であること,  $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z} \curvearrowright R \rightarrow R$  が作用であることは定義と補題 2.2 より明らかである. また,  $\pi$  と作用  $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z} \curvearrowright R$  の組がラック拡大であることも, 補題 2.2 と  $R$  の制限を利用することで, 簡単に証明することができる.

そして

$$s(x) * s(x) = \iota^{-1} \circ \iota(s(x)) * \iota^{-1}(s(x)) = \iota^{-1}(\iota(s(x)) * s(x)) = \iota^{-1}(s(x)) = \iota^{-1}(s(x * x))$$

より  $\sigma(x, x) = -1$  ( $\forall x \in Q$ ) であることがわかり, ここからすぐ  $\phi(x, x) = 0$  であることがわかる. またカンドル 2 コサイクルのもう一つの条件  $\phi(x, z) + \phi(x * z, y * z) = \phi(x * y, z) + \phi(x, y)$  ( $\forall x, y, z \in R$ ) は計算することですぐに確認できる. 従って,  $\phi$  がカンドル 2 コサイクルであることが確認できる.  $\square$

### 3.4 主定理

定理 3.7.  $R$  をラックランク  $N$  の有限ラックで,  $Q$  を  $R$  から誘導されたカンドル,  $\pi: R \rightarrow Q$  を射影で  $|\pi^{-1}(a)| = N$  ( $\forall a \in Q$ ) を満たすものとする. また,  $\phi: Q \times Q \rightarrow \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$  を  $R$  から誘導されたカンドル 2 コサイクル,  $K$  を有向結び目とする. このとき, 次が成り立つ.

$$PR(K, R) = N\Phi_\phi(K)$$

証明.  $PR(K, R) = N\Phi_\phi(K)$  を示す, すなわち,

$$\sum_{w \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}} |\text{Col}_R(K, w)| t^w = N \sum_{C \in \text{Col}_Q(K)} t^{W(C)}$$

を示す. これを証明するためには, ひねり数が  $w$  のラック彩色数  $|\text{Col}_R(K, w)|$  と, 重さが  $w$  のカンドル彩色の数の  $N$  倍とが一致すればよい. 従って, 下のような  $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z} \times \text{Col}_Q(K)$  から  $\bigcup_{w \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}} \text{Col}_R(K, w)$  への全単射な写像  $f$  で,  $f(v, C) = C'$  が, ( $v$  に依存しない)  $C$  の重さ  $W(C)$  をひねり数に持つラック彩色になる写像を作ることできればよい. 本稿では写像の作り方のみ紹介する.

$$\begin{array}{ccc} f : \mathbb{Z}/N\mathbb{Z} \times \text{Col}_Q(K) & \xrightarrow{\text{bij}} & \bigcup_{w \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}} \text{Col}_R(K, w) \\ & & \cup \\ & & \text{Col}_R(K, W(C)) \\ \downarrow \Psi & & \downarrow \Psi \\ (v, C) & \mapsto & C' \end{array}$$

$K$  の図式  $D$  を取り, この任意の弧の上に点  $P$  を取る. この図式と点の取り方に対して写像を作る.  $P$  を含む弧を  $a^1$  と名づけ, 結び目の向きに沿って弧をそれぞれ  $a^2, a^3, \dots$  と名づけていく. また,

$\pi \circ s = id_Q$  を満たす写像  $s: Q \rightarrow R$  を一つとり, 命題 3.5, 命題 3.6 から得られるラック 2 コサイクルを  $\sigma$ , カンドル 2 コサイクルを  $\phi$  とそれぞれ呼ぶ. ここで,  $\mathcal{C}(a^j) = C^j, \iota^i(s(C^j)) = \iota^i(C^j) (i, j \in \mathbb{Z})$  と表記する.

まず,  $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z} \times \text{Col}_Q(K)$  の元  $(v, \mathcal{C})$  をとる. このとき,  $P$  の上に  $\iota^v(C^1)$  を割り当てる. そして,  $K$  の向きに沿って  $a^1$  に  $\iota^v(C^1)$  を割り当てていく. (図 5)

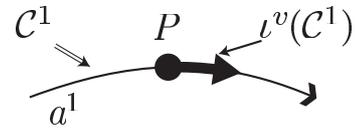


図 5

$K$  の向きに沿って  $a^1, a^2, \dots$  の順番で弧にラックの元を割り当てていく. このとき各正負の交差点では, 図 6 のようにラックの元を割り当てる.

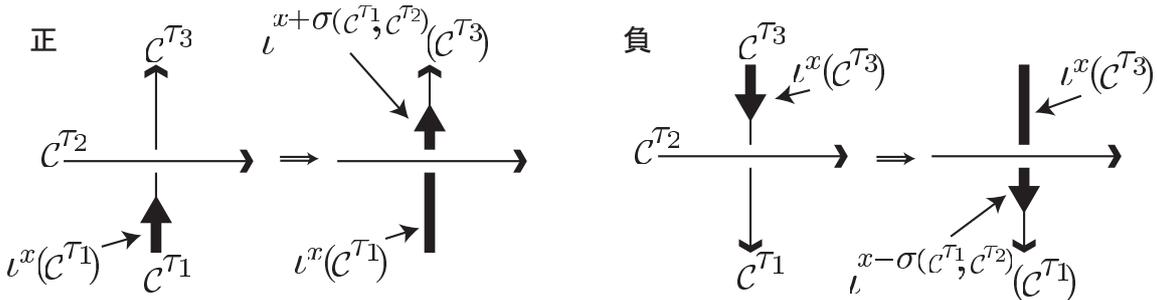


図 6

このように, カンドルの元  $C^i$  の割り当てられていた弧に, その持ち上げであるラックの元  $\iota^v(C^i)$  を割り当てる. すると,  $y * \iota^n(x) = y * x (\forall x, y \in R)$  であることから, 最後までラックの元を割り当てたとき, 各交差点でラック彩色の条件である等式を満たす.

図 6 のラックの割り当て方を考えると, 交差点を越える度に, 正の交差点では  $+\sigma(C^{\tau_1}, C^{\tau_2})$  を, 負の交差点では  $-\sigma(C^{\tau_1}, C^{\tau_2})$  を  $\iota$  の肩に乗せていることがわかる. 従って,  $\mathcal{T}$  を  $D$  の交差点の集合,  $\sum_{\tau \in \mathcal{T}} \text{sign}(\tau) \sigma(C^{\tau_1}, C^{\tau_2}) = W$  とすると,  $a^1$  に戻ってきたときに割り当てられるラックの元は,  $\iota^{v+W}(C^1)$  となる. (図 7)

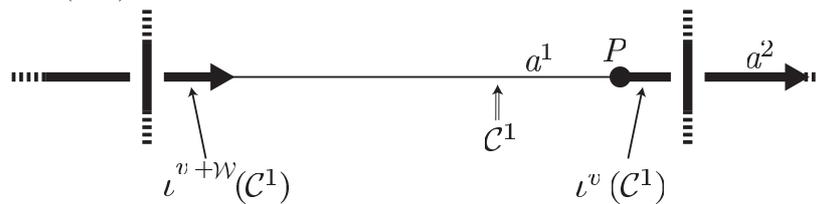


図 7

ここで, まだラックの元を対応させていない  $a^1$  の弧の部分に, 図 8 のように  $\sum_{\tau \in \mathcal{T}} \text{sign}(\tau) \sigma(C^{\tau_1}, C^{\tau_2})$  個の正のひねりを加える. このときできた図式を  $D'$  と名づける.

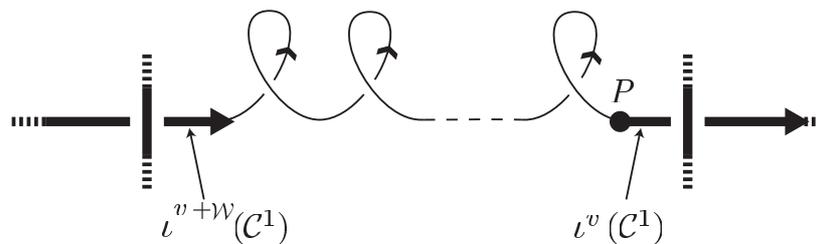


図 8

そして、今ひねった部分にラック彩色になるようラックの元を対応させていくことができる。(図9)

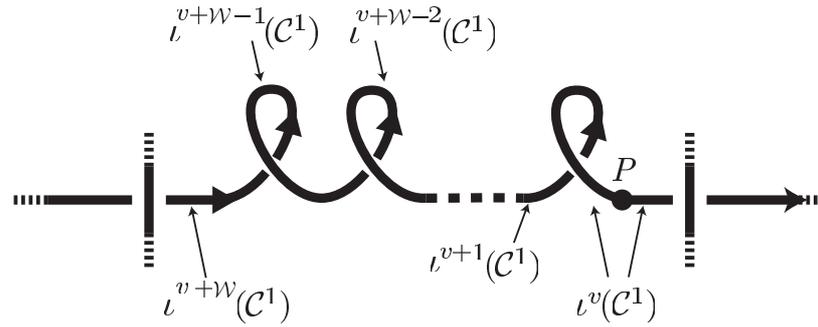


図9

これで  $D'$  に対するラック彩色  $C'$  を作る事ができた。

ここで  $D'$  のひねり数を確認すると、

$$w(D') = w(D) + \sum_{\tau \in T} \text{sign}(\tau) \sigma(C^{\tau_1}, C^{\tau_2}) = \sum_{\tau \in T} \text{sign}(\tau) (1 + \sigma(C^{\tau_1}, C^{\tau_2})) = \sum_{\tau \in T} \text{sign}(\tau) \phi(C^{\tau_1}, C^{\tau_2})$$

すなわち  $C' \in \text{Col}_R(K, W(C))$  であることがわかる。□

## 参考文献

- [1] J. S. Carter, D. Jelsovsky, S. Kamada, L. Langford and M. Saito, *Quandle cohomology and state-sum invariants of knotted curves and surfaces*, Trans. Amer. Math. Soc. **355** (2003), no. 10, 3947–3989.
- [2] M. Eisermann, *Homological characterization of the unknot*, J. Pure Appl. Algebra **177** (2003), no. 2, 131–157.
- [3] R. Fenn, C. Rourke, *Racks and links in codimension two*, J. Knot Theory Ramifications **1** (1992), 343–406.
- [4] D. Joyce, *A classifying invariant of knots, the knot quandle*, J. Pure Appl. Algebra **23** (1982), no. 1, 37–65.
- [5] Y. Kimura, *Characterisation of framings via cohomology of the knot quandle*, to appear in J. Knot Theory Ramifications.
- [6] S. V. Matveev, *Distributive groupoids in knot theory*, (Russian) Mat. Sb. (N.S.) **119(161)** (1982), no. 1, 78–88, 160.
- [7] S. Nelson *Link invariants from finite racks*, arXiv:0808.0029.