

Sheet number and 11-colorable 2-knot

宇野 剛史 (東京学芸大学大学院 M2)

概要

一次元結び目の交点数に類似した概念として、曲面結び目のシート数と呼ばれる不変量が知られている。神戸大の佐藤進氏は、3, 5, 7 彩色可能な球面結び目それぞれに対し、シート数の下からの評価を与えている。本稿では、11 彩色可能な球面結び目のシート数に関して得られた結果を紹介する。

1 球面結び目とシート数

$\mathbb{R}^3$ 内に滑らかに埋め込まれた S^1 を一次元結び目、または、古典的結び目と呼ぶのに対して、 $\mathbb{R}^4$ 内に滑らかに埋め込まれた S^2 を**球面結び目**と呼ぶ。また、2つの球面結び目 K_1, K_2 が**同値**であるとは、 K_1 を K_2 に移す $\mathbb{R}^4$ のアンビエントアイソトピーが存在することと定義する。

$\pi: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ を $\pi(x, y, z, w) = (x, y, z)$ によって定義される自然な射影とする。球面結び目 K について、 $\pi|_K(K)$ の各点の近傍が図.1 のいずれかであるとき、 K が π に関して一般の位置にあるという。図.1 はそれぞれ左から**正則点**、**二重点**、**三重点**、**分岐点**と呼ばれる。

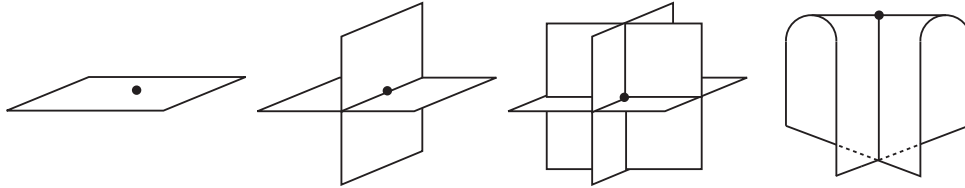


図.1 正則点, 二重点, 三重点, 分岐点の近傍

K が π に関して一般の位置にあるとき、 $\pi(K)$ について、図.2 のように交差が下の近傍を取り除くことで、 $\pi(K)$ の各交差に上下の情報を与えたものを K の**図式**という。また、二重点の近傍において、交差の上の連結成分を**上位シート**、交差が下の2つの連結成分を**下位シート**と呼ぶ。

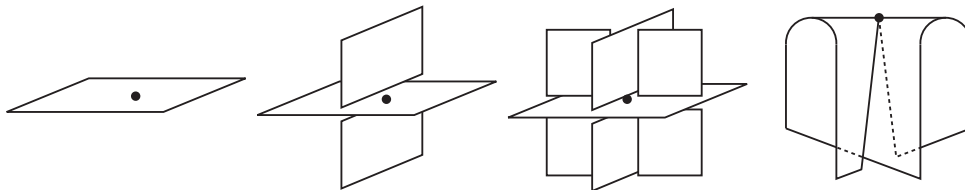


図.2 図式における正則点, 二重点, 三重点, 分岐点の近傍

一次元結び目については、ライデマイスター移動と呼ばれる図式の3つの局所変形によって、2つの一次元結び目が同値であること、それらの図式が有限回のライデマイスター移動と $\mathbb{R}^2$ のアンビエントアイソトピーで移り合うことが同値であることが知られている。球面結び目の図式については、**ローズマン移動**と呼ばれる図.3 の7つの局所変形を用いて、Roseman が次を示した。

定理 1.1. ([9]) 2つの球面結び目 K_1, K_2 が同値な結び目である必要十分条件は、それぞれの図式 D_1, D_2 が有限回のローズマン移動と $\mathbb{R}^3$ のアンビエントアイソトピーで移り合うことである。

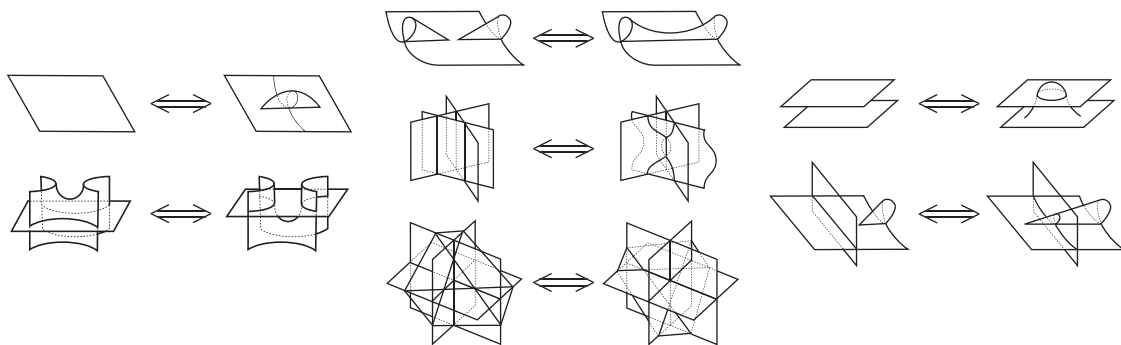


図.3 ローゼンマン移動

球面結び目 K の図式 D において, D の各連結成分をシートという. また, D のシートを元を持つ集合を S_D と表すことにする. S_D の元の個数を $sh(D)$ と書き, **図式 D のシート数** [8] と呼ぶ. K の図式が取りうるシート数のうち, 最小のものを $sh(K)$ と書き, **球面結び目 F のシート数** と呼ぶ. 図.4 は, スパン三葉結び目と呼ばれる球面結び目の図式である. 図より, この図式のシート数が 4 であることがわかる. また, 斎藤氏と佐藤氏によって, スパン三葉結び目のシート数が 4 であることが示されている [8]. つまり, スパン三葉結び目はシート数が 3 以下の図式を持たないことが分かっている.

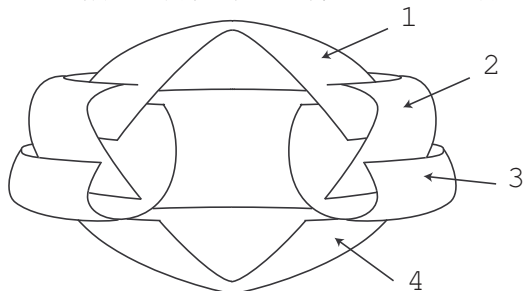


図.4 スパン三葉結び目の図式

2 p 彩色

次に, 球面結び目 K の図式 D の p 彩色を考える. ただし, 本稿では p は 3 以上の素数を表すものとする. 一次元結び目の図式の p 彩色とは, 図式の各弧に $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ の元を対応させる写像 f で, 図式の各交差で $f(\alpha) + f(\gamma) = 2f(\beta)$ (ただし, 図.5 左のように α, γ は交差の下の方の 2 つの弧, β は交差の上の方の弧を表す) が成り立つものであった. 球面結び目の図式の p 彩色とは, 図式の各シートに $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ の元を対応させる写像 f で, 図式の各二重点で $f(A) + f(C) = 2f(B)$ (ただし, 図.5 右のように A, C は下位シート, B は上位シートを表す) が成り立つものである. 各シートに対応する $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ の元を, そのシートの色という. また, p 彩色 f が定値写像であるとき, f は自明であるという. 球面結び目 K のある図式 D に対して, 非自明な p 彩色が存在するとき, K を p 彩色可能であるという.

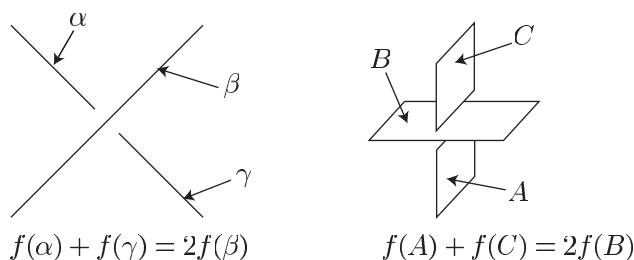


図.5 図式の p 彩色

一次元結び目および球面結び目について、**カンドル** [5], [6] という代数系を用いて定義される**カンドル彩色** [1],[5] と呼ばれるものがある。また、結び目のカンドル彩色可能性が、図式の選び方に依らないことが知られている。 p 彩色という概念は、Fox [3], [4] によって考えられたものであるが、これは二面体カンドル R_p によるカンドル彩色と一致する。

3 先行研究

球面結び目のシート数に対応する一次元結び目の不変量として、図式の最小交点数がよく知られている。今、 p 彩色可能な一次元結び目を取りうる最小交点数のうち、その最小値を C_p と表すことにする。 $3 \leq p \leq 61$ である素数 p についての C_p は、以下の表.1 のようになることが知られている。

表.1 C_p (ただし, $3 \leq p \leq 61$)

p	3	5	7	11	13	17	19	23-27	41-61	...
C_p	3	4	5	6		7		8	9	...

この結果は、一次元結び目の最小交点数に関する表を用いて、小さいものから順に p 彩色可能性を調べていくことで得られる。しかし、球面結び目のシート数に関する表はまだ存在していないため、異なる方法で p 彩色可能性を調べていく必要がある。

球面結び目の p 彩色可能性とシート数については、佐藤進氏によって次が示されている。

定理 3.1. ([7]) 球面結び目 K に対して、次が成立する。

- (1) K が 3 彩色可能であるならば, $sh(K) \geq 4$ である。
- (2) K が 5 彩色可能であるならば, $sh(K) \geq 5$ である。
- (3) K が 7 彩色可能であるならば, $sh(K) \geq 6$ である。

定理 3.1(1) はこの形では書かれていないが、より強い定理 ([7, Theorem 4.2.]) からすぐに導かれる。定理 3.1 を踏まえ、11 彩色可能な球面結び目のシート数を考察し、下からの評価を得ることができた。

4 主定理

4.1 主定理と証明の概略

定理 4.1. 球面結び目 K が 11 彩色可能であるならば, $sh(K) \geq 7$ である。

主定理は、佐藤進氏の先行研究で用いられた手法を拡張することで証明した。本稿では、主定理の証明の一部を紹介する。証明には、次のようにして図式と p 彩色から構成する、ラベル付けされたグラフを用いる。

定義 4.2. ([7]) 写像 f を球面結び目 K の図式 D の p 彩色とする。このとき、次のようにしてラベル付けされたグラフ $P_D(f)$ を構成する。

- (1) $P_D(f)$ の頂点集合は $\text{Im}(f)$ である。
- (2) $P_D(f)$ の異なる頂点 x, y の間に辺が存在するときは、図式 D 上に下位シートの色がそれぞれ x, y であるような二重点が存在するときであり、かつ、そのときに限る。さらに、 x, y をつなぐ辺には上の二重点の上位シートの色 $\frac{x+y}{2} (\in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ をラベル付けする。

このようにして構成されるラベル付けされたグラフ $P_D(f)$ を、 f の**パレットグラフ**と呼ぶ。

例. 図.4 のスパン三葉結び目の図式 D に, 図.6 左のように各シートに $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ の元を対応させる 3 彩色 f を考える. このとき, f が図式 D の各交差で 3 彩色条件を満たしていることが確認できる. $P_D(f)$ の頂点には $\text{Im}(f)$, すなわち 3 彩色 f で使われているシートの色 $0, 1, 2 \in \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ を用いる. また, $P_D(f)$ の辺については, 図式 D 上に下位シートの色が $\{0, 1\}$, $\{1, 2\}$, $\{0, 2\}$ である二重点が存在し, 上位シートの色はそれぞれ $2, 0, 1$ であるから, f のパレットグラフ $P_D(f)$ は図.6 右である.

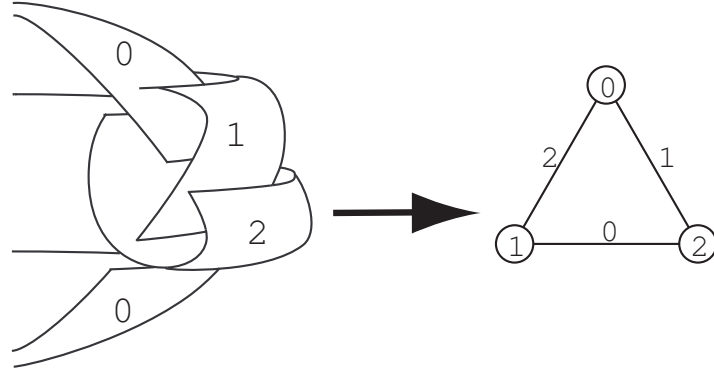


図.6 スパン三葉結び目の図式 D の 3 彩色 f とパレットグラフ $P_D(f)$

主定理の証明は背理法による. すなわち, $sh(D) \leq 6$ である球面結び目 K の図式 D に対して, 非自明な 11 彩色が存在しないことを示す.

11 彩色については, 次の補題が基本的である.

補題 4.3. ([7, Lemma 5.3.] の拡張) p を 11 以上の素数とし, f を球面結び目 K の図式 D の非自明な p 彩色とする. このとき $|\text{Im}(f)| \geq 5$.

今, $sh(D) \leq 6$, $|\text{Im}(f)| \leq sh(D)$ であるから, 不等式 $5 \leq |\text{Im}(f)| \leq sh(D) \leq 6$ が得られる. つまり, $sh(D) = 5$ である図式 D に対して, $|\text{Im}(f)| = 5$ である 11 彩色 f が存在しないこと, また, $sh(D) = 6$ である図式 D に対して, $|\text{Im}(f)| = 5$ または 6 である 11 彩色 f が存在しないことを示せばよい.

4.2 11 彩色の性質

$|\text{Im}(f)| = 5$ および 6 である 11 彩色について, 次の補題が成り立つ.

命題 4.4. 図式 D の非自明な 11 彩色 f で $|\text{Im}(f)| = 5$ であるものが存在するならば, 次のような D の非自明な 11 彩色 f_1, f_2 のいずれかが存在する.

$f_1 : \text{Im}(f) = \{0, 1, 2, 3, 6\}$ であり, $P_D(f)$ は P_1 である.

$f_2 : \text{Im}(f) = \{0, 1, 2, 6, 9\}$ であり, $P_D(f)$ は P_2 の連結な部分グラフである.

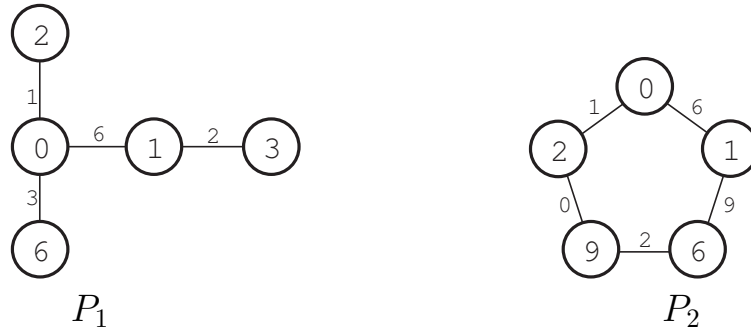


図.7 P_1, P_2

命題 4.5. 図式 D の非自明な 11 彩色 g で $|\text{Im}(g)| = 6$ であるものが存在するならば、次のような D の非自明な 11 彩色 g_1, g_2, g_3, g_4 のいずれかが存在する。

$g_1 : \text{Im}(g_1) = \{0, 1, 2, 3, 4, 6\}$ であり, $P_D(g_1)$ は Q_1 の連結な部分グラフである。

$g_2 : \text{Im}(g_2) = \{0, 1, 2, 3, 5, 6\}$ であり, $P_D(g_2)$ は Q_2 の連結な部分グラフである。

$g_3 : \text{Im}(g_3) = \{0, 1, 2, 3, 6, 8\}$ であり, $P_D(g_3)$ は Q_3 の連結な部分グラフである。

$g_4 : \text{Im}(g_4) = \{0, 1, 2, 3, 6, 9\}$ であり, $P_D(g_4)$ は Q_4 の連結な部分グラフである。

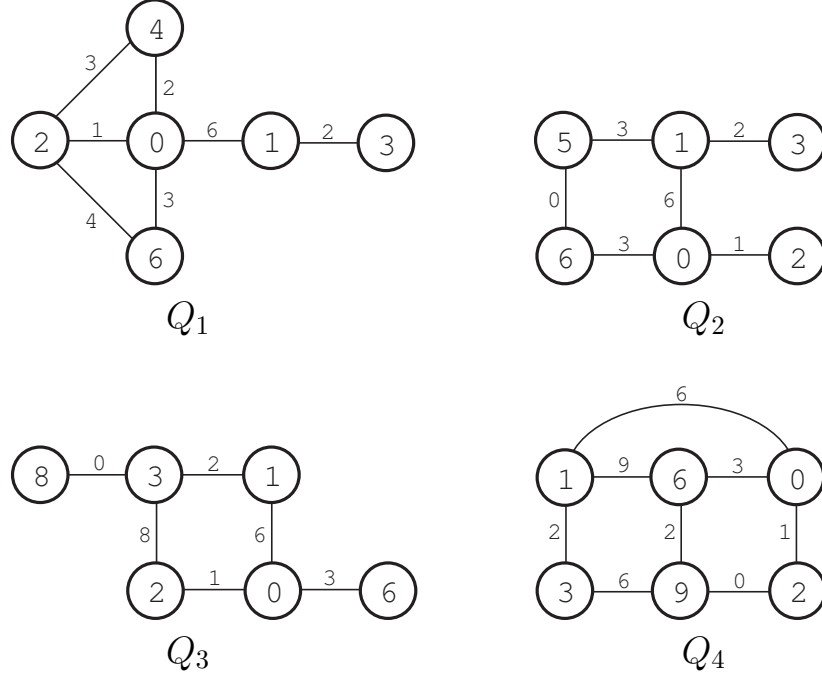


図.8 Q_1, Q_2, Q_3, Q_4

命題 4.4, 4.5 の証明については本稿では扱わないが, p 彩色に関する次の 2 つの補題を用いて示すことができる。また, 命題 4.4, 4.5 は球面結び目に限らず, 一般の曲面結び目の図式に対しても成り立つ。

補題 4.6. ([7]) 写像 f を図式 D の p 彩色をする。 a, b を $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ の任意の元とする。このとき, 図式 D のシートの集合 S_D から $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ への写像 f' を $f'(X) = af(X) + b$ (ただし, $X \in S_D$) と定義すると, f' は図式 D の p 彩色である。

補題 4.7. ([7]) X, Y を図式 D のシートの集合 S_D の異なる元とする。このとき, 図式 D の p 彩色 f で $f(X) \neq f(Y)$ となるものが存在するならば, $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ の任意の異なる 2 元 a, b について, $f'(X) = a, f'(Y) = b$ となる図式 D の p 彩色 f' が存在する。さらに, $|\text{Im}(f)| = |\text{Im}(f')|$ である。

4.3 exclusive

証明の準備として, シートの exclusive という性質について紹介する。

定義 4.8. ([7]) 写像 f を球面結び目 K の図式 D の p 彩色をする。このとき, $A(\in S_D)$ が **exclusive** であるとは, A が上位シートである任意の二重点について, , その下位シートの色はいずれも $f(A)$ であること, または, A が上位シートである二重点が存在しないことである。

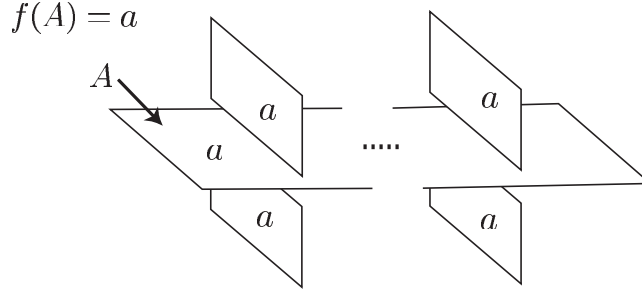


図.10 exclusive

定義 4.9. ([7]) 写像 f を球面結び目 K の図式 D の p 彩色とし, $A, B \in S_D$ とする. このとき, B が A -exclusive であるとは, B が上位シートであり, 下位シートの少なくとも一方が A である二重点が少なくとも一つ存在し, かつ, B が上位シートであるような二重点について, その下位シートは, 少なくとも一方が A であるものか, いずれの色も $f(B)$ であることである.

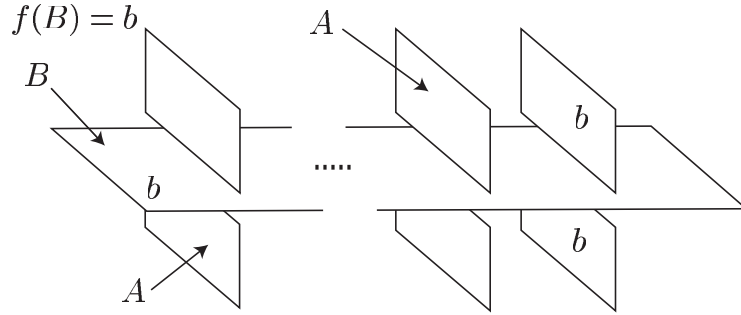


図.11 A-exclusive

シートの exclusive という性質と二重点について, **補空間の彩色** [2] を用いると, 次の補題を示すことができる.

補題 4.10. 異なる 4 つのシート $A_1, A_2, A_3, A_4 \in S_D$ について, A_1 を exclusive, A_2 を A_1 -exclusive, A_3 を A_2 -exclusive, A_4 を A_3 -exclusive とし, それぞれのシートの色を a_1, a_2, a_3, a_4 とする. このとき, $a_4 \neq a_1, 2a_2 - a_1, 2a_3 - a_1, a_1 - 2a_2 + 2a_3$ であるならば, 2 つの下位シートが A_1, A_4 である二重点は存在しない.

5 証明の一部

命題 4.4, 4.5 により, $sh(D) \leq 6$ のとき, パレットグラフが $P_1, P_2, Q_1, Q_2, Q_3, Q_4$ の連結部分グラフであるような 11 彩色 f が存在しないことを示せばよいことがわかる. そこで, 主定理の証明の一部として, 図.9 のような Q_4 の連結部分グラフをパレットグラフに持つような 11 彩色 f が存在しないことを, 補題 4.10 を用いて以下示す.

今, $|\text{Im}(f)| = 6$, $sh(D) = 6$ であり, $\text{Im}(f)$ と S_D の間には 1 対 1 対応がつくので, $i \in \text{Im}(f)$ の色を持つシートを H_i と書くことにする. このとき, パレットグラフについて, 0 でラベル付けされた辺が存在しないことから, パレットグラフの定義より, H_0 が上位シートである二重点で, 下位シートの色が 0 以外のものが存在しないことが分かる. つまり, H_0 は exclusive である. また, 3 でラベル付けされた辺

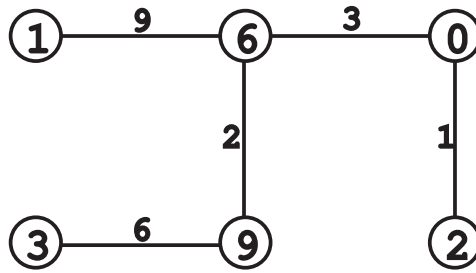


図.9 Q_4 のある連結部分グラフ

が頂点 0, 6 の間にのみ存在することから, H_3 が上位シートである二重点で, 下位シートの色が 0, 6 であるものが存在することがわかり, さらに, H_3 が上位シートである二重点については, 下位シートの色は 0, 6 または, いずれも 3 のものしか存在しないことがわかる. つまり, H_3 は H_0 -exclusive である. 同様に, H_6 が H_3 -exclusive, H_2 が H_6 -exclusive であることがわかる. さらに, $2 \cdot 3 - 0 = 6$, $2 \cdot 6 - 0 = 1$, $0 - 2 \cdot 3 + 2 \cdot 6 = 6$ である.

しかし, パレットグラフについて, 頂点 0, 2 の間に 1 でラベル付けされた辺が存在することから, 下位シートが H_0 , H_2 である二重点が存在することがわかり, 補題 4.10 に矛盾する. よって, 図.9 のようなパレットグラフに持つような 11 彩色 f は存在しない.

参考文献

- [1] J.S.Carter,D.Jelsovsky,S.Kamada,L.Landford and M.Saito, *Quandle cohomology and state-sum invariants of knotted curves and surfaces*, Trans.Amer.Math.Soc.**355**(2003).3947-3989.
- [2] J.S.Carter,S.Kamada and M.Saito, *Geometric interpretations of quandle homology and cocycle knot invariants*,J.knot theory Ramifications. **10**(2001).345-358
- [3] R. H. Fox, *A quick trip through knot theory*, Topology of 3-manifolds and related topics (Proc. The Univ. of Georgia Institute, 1961), 120–167.
- [4] R. H. Fox, *Metacyclic invariants of knots and links*, Canad. J. Math. **22** (1970), 193–201.
- [5] D.Joyce, *A classifying invariant of knots,the knot quandle*, J.Pure Appl.Alg.**23**(1982).37-65.
- [6] S.Matveev, *Distributive groupoids in knot theory*(Russian), Math.USSR-Sbornik.**46**(1982).73-83.
- [7] S.Satoh.,*Sheet number and quandle-colored 2-knot*, The Mathematical Society of Japan,**61**, No.2(2009), 579-606.
- [8] S.Satoh,M.Saito, *The spun trefoil needs four broken sheets*, J.Knot Theory Ramifications.**10**(2001) .345-358
- [9] D. Roseman, *Reidemeister-type moves for surfaces in four-dimensional space*, in “ Knot Theory ” (Warsaw, 1995),Banach Center Publ.,**42**, Polish Academy of Sciences,Warsaw (1998) 347-380