Plane curves in an immersed graph in $\mathbb{R}^2$

坂本真理沙（早稲田大学大学院教育学研究科）

（谷山公規氏（早稲田大学教育学部）との共同研究）

概要

Conway-Gordon の定理 [1] などでは，頂点数の大きな完全グラフの任意の空間埋め込みは，つねに非自明な結び目・絡み目を含むことが示されている．この報告書では，頂点数の大きな完全グラフの平面への任意のはめ込みは，つねにある特徴を持つ平面閉曲線を含むことを紹介する．

定義 1　G をグラフとし，f を G から $\mathbb{R}^2$ への continious map としたとき，f の多重点が辺による横断的な 2 重点（これを交点と呼ぶ）のみのとき，f または $f(G)$ を G の ***generic immersion*** と呼ぶ．特に円周 $\mathbb{S}^1$ もグラフとみなす．

定義 2　J を n 個の交点をもつ円周 $\mathbb{S}^1$ の generic immersion としたとき，J の**コードダイアグラム** $CD(J)$ とは，各交点の原像をコードで結んで得られる n 本のコード付き円周のことをいう．以下では円周から円周への向きを保つ同相写像で互いにうつりあう 2 つのコードダイアグラムは同じものと考える．n 本のコードのうち何本かを忘れたコードダイアグラムを部分コードダイアグラムと呼ぶ．

定義 3　グラフ G の辺全体の集合を $E(G)$，サイクル全体の集合を $\Gamma(G)$ と書く．特に，ちょうど n 頂点を通るサイクル全体の集合を $\Gamma_n(G)$ と書く．f をグラフ G から $\mathbb{R}^2$ への generic immersion としたとき，$\Gamma(G)$ の任意のサイクル γ に対して，$f(\gamma)$ は γ の generic immersion になっている．$CD(f(\gamma))$ で，$f(\gamma)$ のコードダイアグラムを表す．

定義 4　n **頂点完全グラフ** K_n とは，頂点数が n で，どの 2 つの頂点もちょうど 1 本の辺で結ばれているグラフのことである．

fを5頂点完全グラフK_5から$\mathbb{R}^2$へのgeneric immersionとする．xとyを，$x \cap y = \phi$であるような，K_5の辺の無順序対とする．$f(x)$と$f(y)$のあいだの交点の個数を$\#(f(x) \cap f(y))$と書くことにする．$\#(f(x) \cap f(y))$の$x \cap y = \phi$であるような，K_5の辺の無順序対全てにわたる和について次の命題が成立する．

命題 5　fを5頂点完全グラフK_5から$\mathbb{R}^2$への任意のgeneric immersionとする．このとき次が成立する．

$$\sum_{x,y \in E(K_5), x \cap y = \phi} \#(f(x) \cap f(y)) \equiv 1 \pmod 2.$$

この命題から，次の系が得られる．

系 6　fをK_5から$\mathbb{R}^2$への任意のgeneric immersionとしたとき，$f(x) \cap f(y) \neq \phi$となる，$x \cap y = \phi$であるK_5の辺x, yが存在する．

命題 7　fとgをグラフGから$\mathbb{R}^2$への任意のgeneric immersionとしたとき，fとgは図１の5つの変形の有限回と$\mathbb{R}^2$の全同位変形で互いにうつりあう．

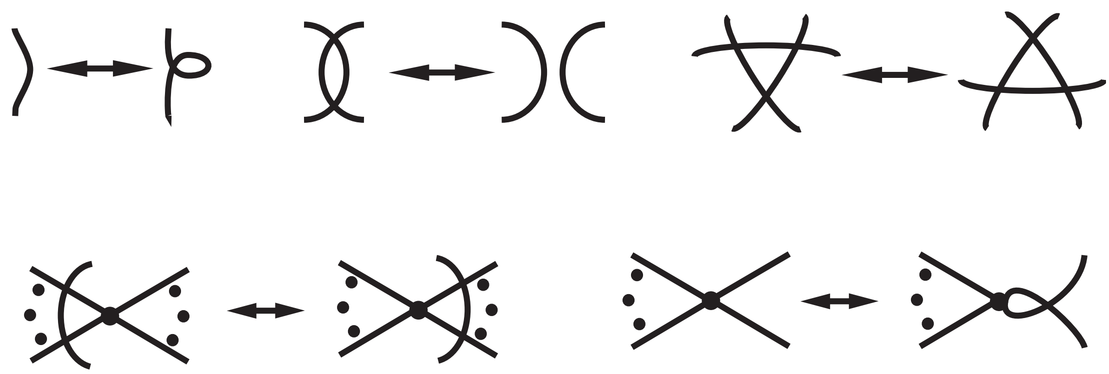

図１

命題5は命題7から証明される．

主定理 8　n を 2 以上の自然数とする．CD_n を任意の n 本のコードダイアグラムとする．f を $4n$ 頂点完全グラフ K_{4n} から $\mathbb{R}^2$ への任意の generic immersion としたとき，$CD(f(\gamma))$ が CD_n を部分コードダイアグラムとして含むような $\gamma \in \Gamma_{4n}(K_{4n})$ が存在する．

証明の概略を述べる．K_{4n} から，任意に 5 頂点を選ぶと，系 6 から，交点をもつ隣接しない 2 辺が存在する．この 2 辺の両端である 4 頂点を忘れて得られる $K_{4(n-1)}$ からさらに 5 頂点を選ぶ，ということを繰り返す．ただし，最後は 4 頂点しか残らないが，もう 1 つの頂点は，前に使った頂点を使う．こうして得られた $2n$ 本の辺をうまくつないで γ を作る．最後のステップで，前に使った頂点を使っても大丈夫であることは，2 本以上のどのようなコードダイアグラムにも，必ず 2 つのコードでそれぞれの両端のうちの 1 つずつが円周上で隣り合うものが存在することから保証される．

さらに，特別なコードダイアグラムについては，次の定理が成り立つことがわかった．

定理 9　n を自然数とする．CD_n を図 2 のような n 本のコードダイアグラムとする．f を $3n+2$ 頂点完全グラフ K_{3n+2} から $\mathbb{R}^2$ への任意の generic immersion としたとき，$CD(f(\gamma))$ が CD_n を部分コードダイアグラムとして含むような $\gamma \in \Gamma_{3n+2}(K_{3n+2})$ が存在する．

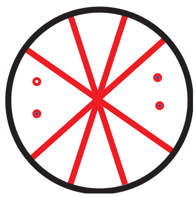

図 2

この定理の証明は，コードダイアグラム CD_n の特徴から，主定理 8 の証明のおける最後の操作を繰り返し使えることから得られる．

ここからは，6 頂点完全グラフ K_6 について，得られた結果を紹介する．

定理 10 *[DeCelles-Foisy-Versace-Wilson [2]]*　f を 6 頂点完全グラフ K_6 から $\mathbb{R}^2$ への任意の generic immersion としたとき，$f(\gamma)$ が三葉結び目のある射影になるような $\gamma \in \Gamma(K_6)$ が存在する．

[4] から次の定理が得られる．

定理 11　J を円周から $\mathbb{R}^2$ への generic immersion とする．このとき，次の (1)〜(4) は同値である．

(1) J はある非自明な結び目のある射影である．

(2) J は三葉結び目のある射影である．

(3) J は $\mathbb{R}^2$ に埋め込まれた円周に図 1 の最初の変形を繰り返しても得られない．

(4) $CD(J)$ は図 3 のコードダイアグラムを部分コードダイアグラムとして含む．

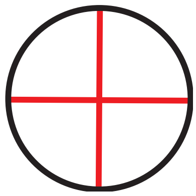

図 3

定義 12　f を円周 $\mathbb{S}^1$ から $\mathbb{R}^2$ への generic immersion とする．f の交点数を $c(f)$ で表し，$f(\mathbb{S}^1)$ の各交点に上下の情報をつけて得られる $2^{c(f)}$ 個の結び目の集合を $\mathcal{K}(f(\mathbb{S}^1))$ で表す．結び目 K の *Conway* 多項式の 2 次の係数を $a_2(K)$ と書いたとき，$a_2(f)$ は [3] で，次のように定義され，***average invariant*** と呼ばれている．

$$a_2(f) := \frac{1}{2^{c(f)}} \sum_{K \in \mathcal{K}(f(\mathbb{S}^1))} a_2(K).$$

この定義から，次の命題が得られる．

命題 13 (1) $a_2($  $) - a_2($ $) = 0,$

(2) $a_2($  $) - a_2($  $) = 0,$

(3) $a_2($  $) - a_2($  $) = \frac{1}{4},$

(4) $a_2($  $) - a_2($  $) = \frac{1}{4},$

(5) $a_2($  $) - a_2($  $) = \frac{1}{4}.$

定義 14　6 頂点完全グラフ K_6 から $\mathbb{R}^2$ への generic immersion f に対し，$\alpha(f)$ を次のように定義する．

$$\alpha(f) := \sum_{\gamma \in \Gamma_6(K_6)} a_2(f\,|_\gamma).$$

この定義と命題 7 と命題 13 から次の定理が得られる．

主定理 15　f を 6 頂点完全グラフ K_6 から $\mathbb{R}^2$ への任意の generic immersion とする．このとき次が成立する．

$$\alpha(f) \equiv \frac{1}{4} \quad (mod \ \ \frac{1}{2}).$$

この定理よりつねに $\alpha(f) \neq 0$ なので，$a_2(f\,|_\gamma) \neq 0$ となる $\gamma \in \Gamma_6(K_6)$ がつねに存在する．自明な結び目の a_2 は 0 なので，このとき $f(\gamma)$ はある非自明結び目のある射影になっている．このとき定理 11 より $f(\gamma)$ は三葉結び目のある射影になっていることが分かる．これで定理 10 の γ を $\gamma \in \Gamma_6(K_6)$ ととれることが分かった．

ここからは，7 頂点完全グラフ K_7 について，得られた結果を紹介する．
[4] から，次の定理が得られる．

定理 16　J を円周から $\mathbb{R}^2$ への generic immersion としたとき，次の (1),(2),(3) は同値．
(1) J は 8 の字結び目のある射影である．
(2) J は図 4 のような円周の $\mathbb{R}^2$ への generic immersions のうちのいくつかの $\mathbb{S}^2 = \mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$ 上の連結和では得られない．
(3) $CD(J)$ は図 5 のコードダイアグラムを部分コードダイアグラムとして含む．

主定理 17　f を 7 頂点完全グラフ K_7 から $\mathbb{R}^2$ への任意の generic immersion とする．このとき $CD(f(\gamma))$ が図 5 のコードダイアグラムを部分コードダイアグラムとして含むような $\gamma \in \Gamma(K_7)$ が存在する．

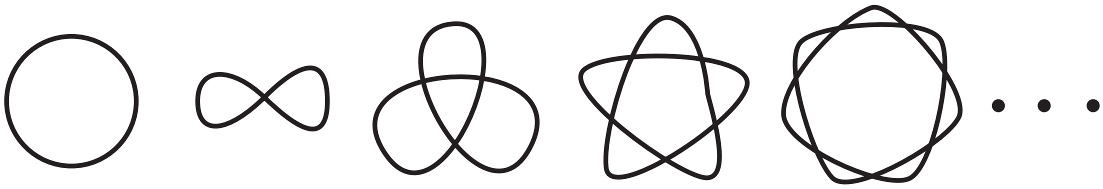

図4

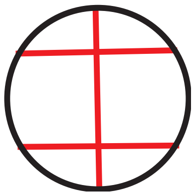

図5

この定理の証明は，系6を使って，K_7 の部分グラフで K_5 と同形であるものをいろいろと考えて場合分けすることでなされる．

この定理と定理16から，次の系が得られる．

系 18 f を7頂点完全グラフ K_7 から $\mathbb{R}^2$ への任意の generic immersion とする．このとき $\gamma \in \Gamma(K_7)$ が存在して，$f(\gamma)$ は8の字結び目のある射影になっている．

References

[1] J.H. Conway and C.McA. Gordon, *Knots and links in spatial graphs*, J.Graph Theory **7** (1983), 445–453.

[2] A. DeCelles, J. Foisy, C. Versace, and A. Wilson, *On graphs with every planer immersion lifts to a knotted spatial embedding*, Involve **1** (2008), 145–158.

[3] M. Polyak, *Invariants of curves and fronts via Gauss diagram*, Topology **37** (1998), 989–1009.

[4] K. Taniyama, *A parial oder of knots*, Tokyo J. Math **12** (1989), 205–229.

〒169-8050　東京都新宿区西早稲田 1-6-1　早稲田大学大学院教育学研究科