

On links with common sublinks

清田 恵理 (東京学芸大学大学院教育学研究科)

概要

C_k -move とは, $k+1$ 本の arc からなるタングルの交換で定義される絡み目の局所変形である. 特に, これら $k+1$ 本の arc が全て異なる成分に属しているとき, C_k^d -move と呼ぶことにする. C_k^d -move は絡み目の k 成分の sublink を保存するという性質を持っている. 今回, この逆である「対応する任意の k 成分の sublink が等しい 2 つの絡み目は, C_k^d -move で移り合うか」という問題を考察した. また, 任意の k 成分が自明である絡み目 (これを k -Brunnian link と呼ぶ) と有限型不変量の関係についても考察した. 本稿では, これら 2 つの考察から得た結果を紹介する.

1 準備

定義 1.1. (*Habiro[1]*). n 成分の絡み目 L の図式について次のような局所変形を C_k -move と呼ぶ. 特に成分が全て異なる C_k -move を C_k^d -move と呼ぶ. ただし, $1 \leq k \leq n$ とする.

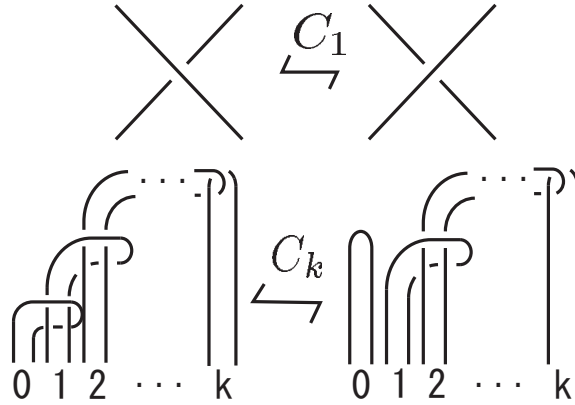


図 1: C_k -move

絡み目 L と L' が C_k 同値であるとは, L と L' が有限回の C_k -move とアンビエントイソトピーによって移り合うことであり, $L \stackrel{C_k}{\sim} L'$ と表す. また L と L' が C_k^d 同値であるとは, L と L' が有限回の C_k^d -move とアンビエントイソトピーによって移り合うことであり, $L \stackrel{C_k^d}{\sim} L'$ と表す.

定義 1.2. (k 成分同値). $L = K_1 \cup K_2 \cup \dots \cup K_n$, $L' = K'_1 \cup K'_2 \cup \dots \cup K'_n$ を n 成分の絡み目とし, $k \leq n$ とする. L と L' が k 成分同値であるとは, k 個の元からなる $\{1, 2, \dots, n\}$ の任意の部分集合 S に対し

$$\bigcup_{i \in S} K_i = \bigcup_{i \in S} K'_i$$

が成立するときをいう。このとき、 $L \stackrel{k}{\sim} L'$ と表す。

例 1.1. 図 2 は、2 成分同値の絡み目の例である。



図 2: 2 成分同値の絡み目の例

2 主定理

$(n+1)$ 成分の絡み目が $(n+1)$ 成分の自明な絡み目と n 成分同値であるとき、 C_k^d 同値に関して次のような研究がされている。

定理 2.1. (Miyazawa-Yasuhara[3], Habiro,[4]). L を $n+1$ 成分の絡み目、 U を $n+1$ 成分の自明な絡み目とする。 $L \stackrel{n}{\sim} U$ である為の必要十分条件は、 $L \stackrel{C_n^d}{\sim} U$ であることである。

十分性は C_k^d -move が k 成分の部分絡み目を保存することから明らかである。よって主に必要性について証明されている。そこでまず、この定理の条件を $L \stackrel{k}{\sim} U$ に拡張することを考え、次の結果を得た。

定理 2.2. L を $(n+1)$ 成分の絡み目、 U を $(n+1)$ 成分の自明な絡み目とする。 $L \stackrel{k}{\sim} U$ である為の必要十分条件は、 $L \stackrel{C_k^d}{\sim} U$ であることである。

定理 2.2 では、絡み目 L と自明な絡み目が k 成分同値となる場合を考えていたが、さらに条件を一般化し、次の問題を考えた。

問題. L と L' を順序付き n 成分絡み目とする。 $L \stackrel{k}{\sim} L'$ ならば $L \stackrel{C_k^d}{\sim} L'$ が成立するか。

この問題に対し次の命題を得た。

命題 2.1. (1) $L \stackrel{1}{\sim} L'$ ならば、 $L \stackrel{C_1^d}{\sim} L'$

(2) $k \geq 2$ のとき、 $L \stackrel{k}{\sim} L'$ であり、かつ $L \stackrel{C_k^d}{\sim} L'$ ではない例が存在する。

以下、この章の残りでこの命題を証明する。

まず、 $L \stackrel{1}{\sim} L'$ ならば、 $L \stackrel{C_1^d}{\sim} L'$ について示す。 $L \stackrel{1}{\sim} L'$ より、 L と L' は各成分が等しい絡み目であることがわかる。よって異なる成分間の交差交換で L を L' に移すことができる。異なる成分間での交差交換は、 C_1^d -move の定義なので $L \stackrel{C_1^d}{\sim} L'$ となる。

$k \geq 2$ の場合の反例を示す。まず、 $k \geq 3$ の時の反例として次のものがあげられる。

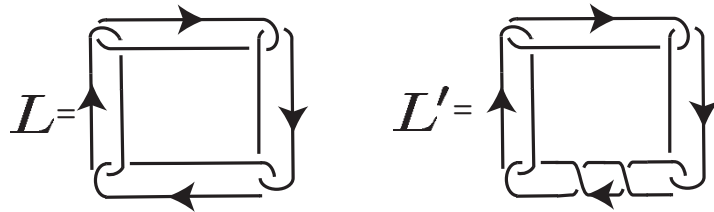


図 3: 3 成分同値の反例

これらは, 3 成分同値である. それぞれの Arf 不変量を計算すると $\text{Arf}(L)=0$, $\text{Arf}(L')=1$ となり, Arf 不変量の値は異なる. しかし, Arf 不変量は $k \geq 3$ において C_k -move によって変化しない. この事実は次の補題から導かれる.

補題 2.1. (Murakami-Nakanishi [5]). L を n 成分のプロパーな絡み目, L を有限回 *pass move* して得られた n 成分の絡み目を L' とする. このとき, L' はプロパーな絡み目であり, $\text{Arf}(L)=\text{Arf}(L')$ を満たす. ここで *pass move* とは次のような絡み目の図式に対する局所変形のことである.

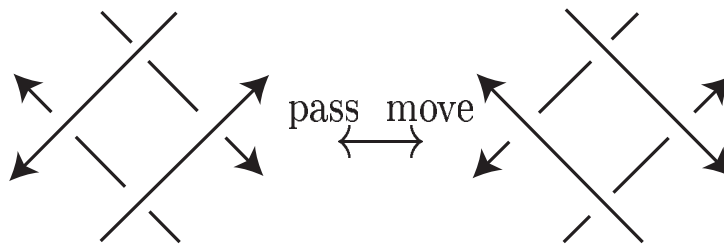


図 4: pass move

$k \geq 3$ において C_k -move は, *pass move* で得られる. これは次の図からわかる.

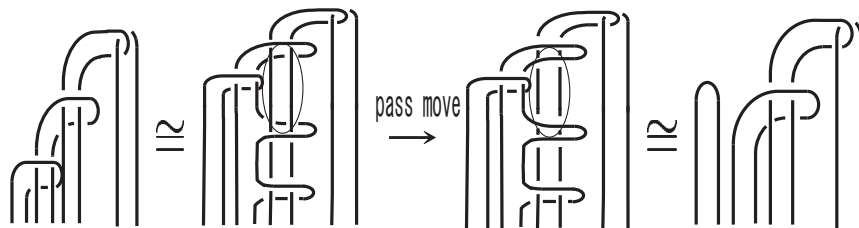


図 5: pass move と C_3 -move

図 5 から C_3 -move は *pass move* から得られることがわかる. また同様に, $k \geq 3$ において C_k -move は *pass move* から得られることがわかる. 先ほどの例に戻って考えると, L と L' は, Arf 不変量の値が異なるので, L と L' は C_3 同値ではない. C_k^d -move は C_k -move に条件を加

えたものであったので, 2つの絡み目は C_3^d 同値でもないことがわかる. $k \geq 4$ のときの反例は, 先ほどの反例に自明な成分を一つずつ加えていけば同様に構成することができる. 例えば図 6 は 4 成分同値であるが, C_4^d 同値ではない例である.

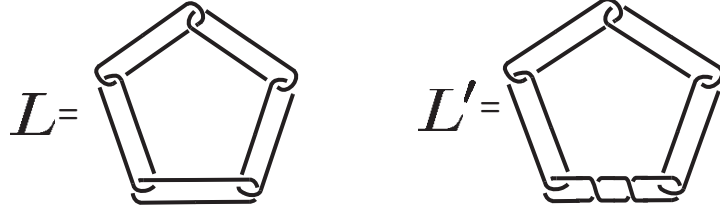


図 6: 4 成分同値の反例

$k \geq 3$ において C_k^d -move で Arf 不変量は変化しないが, C_2 -move で Arf 不変量は変化する. よって $k = 2$ の場合は同じ議論をすることができない. そこで次の 2つの絡み目を考える.

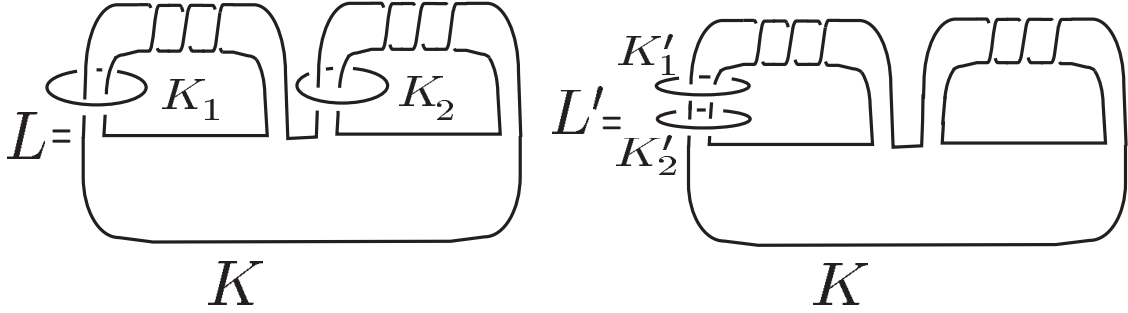


図 7: 2 成分同値の反例

これらは 2 成分同値になっている. それぞれ K 上の double branched cover をとり, それを X^2 とする. ここでは, lk_{X^2} を X^2 の 1 次ホモロジー群 $H_1(X^2; \mathbb{Z})$ における絡み目の絡み数とする. $L \stackrel{C_2^d}{\sim} L'$ と仮定すると, L は例えば図 8 のように K_1 と K_2 の交差交換のみで L' に移る. よって $\mathbb{S}^3 \setminus K$ 内で $K_1 \cup K_2$ と $K'_1 \cup K'_2$ はホモトピックであるので, 次の条件を満たすような持ち上げ $\tilde{K}_1 \cup \tilde{K}_2$ と $\tilde{K}'_1 \cup \tilde{K}'_2$ が存在する.

$$\tilde{K}_1 \cup \tilde{K}_2 \sim \tilde{K}'_1 \cup \tilde{K}'_2$$

ただしここで $\sim$ はホモトピックとする. よって $\tilde{K}_1 \cup \tilde{K}_2$ と $\tilde{K}'_1 \cup \tilde{K}'_2$ がホモトピックなのでこれらはホモログでもある. 以上より, $\tilde{K}_1, \tilde{K}_2, \tilde{K}'_1, \tilde{K}'_2$ をホモロジーの元とすれば, $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ において,

$$lk_{X^2}(\tilde{K}_1, \tilde{K}_2) = lk_{X^2}(\tilde{K}'_1, \tilde{K}'_2)$$

が成立する. しかし実際に計算してみると, それぞれ

$$lk_{X^2}(\tilde{K}_1, \tilde{K}_2) = 0 \quad lk_{X^2}(\tilde{K}'_1, \tilde{K}'_2) = \pm \frac{1}{3}$$

となり, これらは一致しない. よって矛盾となり, L と L' は C_2^d 同値ではない.

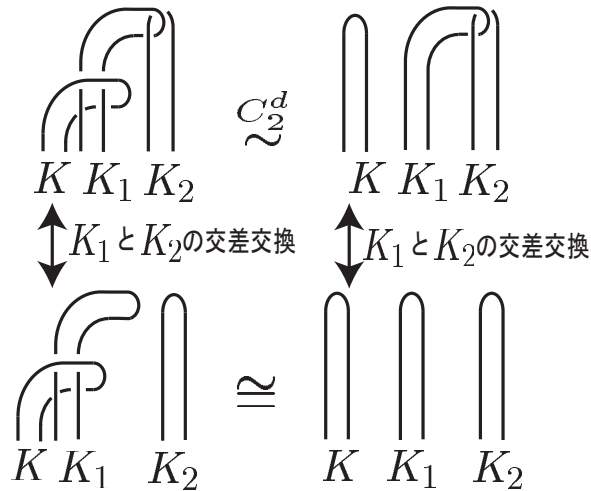


図 8:

3 定理 2.2 の応用

ここでは, 定理 2.2 を応用することを考える.

定義 3.1. (*Vassiliev 不変量*). $\mathcal{L}$ を向き付けられた順序付き絡み目型の集合, $\mathbb{Z}\mathcal{L}$ を $\mathcal{L}$ で生成される自由 $\mathbb{Z}$ 加群とする. κ を *singular link* の集合から $\mathbb{Z}\mathcal{L}$ への写像として以下のように定義する.

$$\kappa : \{ \text{singular links} \} \longrightarrow \mathbb{Z}\mathcal{L}$$

$$\begin{array}{ccc} L & \longmapsto & \kappa(L) \\ \begin{array}{c} \nearrow \\ \searrow \\ \bullet \end{array} & \longmapsto & \begin{array}{c} \nearrow \\ \searrow \end{array} - \begin{array}{c} \nearrow \\ \swarrow \end{array} \end{array}$$

J_k を $\{ \kappa(L) \mid L: k\text{-singular link} \}$ で生成される $\mathbb{Z}\mathcal{L}$ の部分加群とする. $v: \mathcal{L} \rightarrow A$ とし, $v_*: \mathbb{Z}\mathcal{L} \rightarrow A$ を, v の自然な拡張とする. v_* を J_{n+1} に制限すると零写像となるととき, v を位数 n 以下の *Vassiliev 不変量* と呼ぶ.

$n+1$ 成分の絡み目 L が $n+1$ 成分の自明な絡み目と n 成分同値であるとき, Vassiliev 不変量に関して次のような研究がされている.

定理 3.1. (*Habiro [4]*). L が $n+1$ 成分の絡み目, U を $n+1$ 成分の自明な絡み目とする. $L \stackrel{n}{\sim} U$ ならば, $L - U \in J_{2n}$ である.

この結果から次のことがすぐにわかる.

系 3.1. f を位数 $2n-1$ 以下の Vassiliev 不変量, L を $(n+1)$ 成分の絡み目, U を $(n+1)$ 成分の自明な絡み目とする. $L \stackrel{n}{\sim} U$ であるならば, $f(L) = f(U)$ となる.

そこで, この定理を $L \stackrel{k}{\sim} U$ の場合に拡張することを考え, 次の結果を得た.

定理 3.2. L が $(n+1)$ 成分の絡み目, U を $(n+1)$ 成分の自明な絡み目とする. $L \stackrel{k}{\sim} U$ ならば, $L - U \in J_{2k}$ である.

同様にこの結果から次のことがすぐにわかる.

系 3.2. f を位数 $2k-1$ 以下の Vassiliev 不変量, L が $(n+1)$ 成分の絡み目, U を $(n+1)$ 成分の自明な絡み目とする. $L \stackrel{k}{\sim} U$ ならば, $f(L) = f(U)$ となる.

この定理は, Habiro 氏による証明と同様にして示すことができる.

4 今後の課題

この章ではこれから考えたい問題についてあげる. 2 章において $k \geq 3$ のときは, 各成分が自明な絡み目の反例を作ることができた. $k=2$ の場合でも同様の反例を作ろうと試みたが図のようになり, 作ることができなかった.

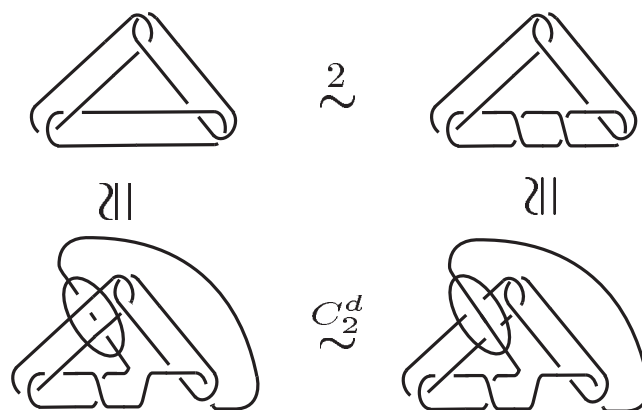


図 9: C_2^d 同値でかつ 2 成分同値である絡み目

そこで次のような予想を立て, 現在研究中である.

予想 1. L, L' を各成分が自明な n 成分の絡み目とする. このとき, $L \stackrel{2}{\sim} L'$ であることと $L \stackrel{C_2^d}{\sim} L'$ であることは必要十分条件である.

また, 定理 3.2 では $n+1$ 成分の絡み目 L が $L \stackrel{k}{\sim} U$ をみたすとき, L と U は位数 $2k-1$ 以下の Vassiliev 不変量のとる値が等しくなることを述べた. では, 位数 $2k$ の Vassiliev 不変量についてはどうなるかという疑問が浮かぶが, これについては以下の結果が知られている.

定理 4.1. (Habiro-Meilhan [6]) L を $(n+1)$ 成分の絡み目, U を $(n+1)$ 成分の自明な絡み目とし, $L \stackrel{n}{\sim} U$ とする. A を可換群とし, v_{2n} を A に値をとる位数 $2n$ 以下の Vassiliev 不変量とする. また S_{n-1} を $n-1$ 次対称群とする. このとき S_{n-1} の任意の元 σ, σ' に対して A に値をとる定数 $f_{\sigma\sigma'}$ が存在し次の条件を満たす.

$$v_{2n}(L) - v_{2n}(U) = \sum_{\sigma, \sigma' \in S_{n-1}} f_{\sigma\sigma'} \bar{\mu}_L(\sigma) \bar{\mu}_L(\sigma')$$

ただし $\bar{\mu}_L(\sigma)$ は, L の長さ $(n+1)$ の Milnor 不変量とし, $\bar{\mu}_L(\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(n-1), n, n+1)$ とする.

この定理の $L \stackrel{k}{\sim} U$ の場合の拡張として, 次の予想を立て, 現在研究中である.

予想 2. L を $(n+1)$ 成分の絡み目, U を $(n+1)$ 成分の自明な絡み目とし, $L \stackrel{k}{\sim} U$ とする. A を可換群とし, v_{2k} を A に値をとる位数 $2k$ 以下の Vassiliev 不変量とする. また S_{k-1} を $k-1$ 次対称群とする. このとき S_{n-1} の任意の元 σ, σ' と, $1, 2, \dots, n+1$ の任意の $k+1$ 個からなる部分列 $I = s_1, s_2, \dots, s_{k+1}$ に対して A に値をとる定数 $f_{\sigma\sigma'}^I$ が存在し次の条件を満たす.

$$v_{2k}(L) - v_{2k}(U) = \sum_I \sum_{\sigma, \sigma' \in S_{k-1}} f_{\sigma\sigma'}^I \bar{\mu}_L(\sigma(I)) \bar{\mu}_L(\sigma'(I))$$

ただし $\bar{\mu}_L(\sigma(I))$ は, L の長さ $(k+1)$ の Milnor 不変量とし, $\bar{\mu}_L(s_{\sigma(1)}, s_{\sigma(2)}, \dots, s_{\sigma(k-1)}, s_k, s_{k+1})$ とする.

参考文献

- [1] K.Habiro. Claspers and finite type invariants of links. Geom. Topol. 4 (2000), 1-83 .
- [2] D.E.Penny. Generalized Brunnian Links. Duke Math. J. 36 (1969), 31-32.
- [3] H.A.Miyazawa and A.Yasuhara. Classification of n -component Brunnian links up to C_n -move. Topology Appl. 153 (2006), 1643-1650.
- [4] K.Habiro. Brunnian links, claspers and Goussarov-Vassiliev finite type invariants. Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 142 (2007), 459-468.
- [5] H.Murakami and Y.Nakanishi. On a certain move generating link-homology. Math. Ann. 284 (1989), 75-89.
- [6] K.Habiro and J.-B.Meilhan. Finite type invariants and Milnor invariants for Brunnian links. Internat. J. Math. 19 (2008), 747-766.
- [7] J.H.Przytycki and A.Yasuhara. Linking numbers in rational homology 3-spheres, cyclic branched covers and infinite cyclic covers. Trans. Amer. Math. Soc. 356 (2004), 3669-3685.
- [8] J.Milnor. Link groups. Ann. of Math. (2) 59, (1954). 177-195.

〒 184-8501 東京都小金井市貫井北町 4-1-1 東京学芸大学大学院教育学研究科数学教育専攻
e-mail: m101706p@st.u-gakugei.ac.jp