

4次元多様体の曲面図式的具体例の構成について

早野健太*

大阪大学大学院理学研究科数学専攻 博士前期課程2年

1 序

全ての4次元多様体を記述できる新たな手法として曲面図式が Williams [7] によって導入された. この図式は閉曲面とある条件を満たす単純閉曲線の列からなり, これらの閉曲線が4次元多様体のハンドル分解の接着円周を表していることから, 3次元多様体におけるヒーガード図式の対応物とみなすことができる. しかし, 曲面図式的具体例を与えることは容易ではなく, 基本的な4次元多様体の曲面図式すらあまり知られていない.

4次元多様体の曲面図式は次のような手順で得られる. まず与えられた4次元多様体を全空間とする, simplified purely wrinkled fibration と呼ばれるある安定写像をとる. 次にこの写像の, 消滅サイクルと呼ばれる, 一般ファイバーに現れる閉曲面内の単純閉曲線の列をとる. このとき得られる単純閉曲線の列が, もとの4次元多様体の曲面図式である. 特に, 消滅サイクルがわかる simplified purely wrinkled fibration をとることができれば曲面図式を得ることができるが, これは一般に容易ではない. また, 単純閉曲線の列がある多様体の曲面図式となるための必要十分条件が知られているが (本稿の補題 3.3 を参照), この条件を満たすような単純閉曲線を見つけることも同様に困難である.

本稿では simplified purely wrinkled fibration や曲面図式の定義, および性質を簡単に述べた後, 筆者により得られた曲面図式の新たな例を紹介する.

2 Simplified purely wrinkled fibration と曲面図式

4次元多様体の曲面図式は, simplified purely wrinkled fibration と呼ばれる, 可微分写像の消滅サイクルをとることにより得られるのであった. まずはこの写像の定義を述べる.

*k-hayano@cr.math.sci.osaka-u.ac.jp

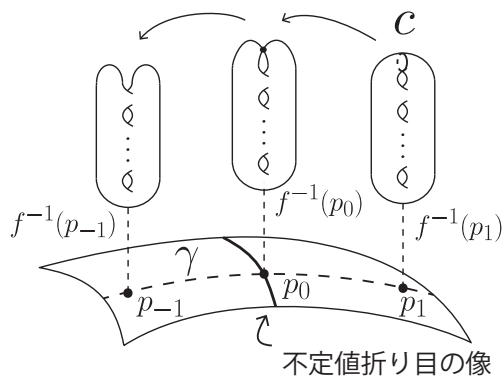
定義 2.1. M を有向 4 次元閉多様体とし, $f: M \rightarrow S^2$ を可微分写像とする. f が以下の条件を満たすとき, f を **simplified purely wrinkled fibration** という.

1. f の特異点集合 $\mathcal{S}_f$ は連結で空でなく, $f|_{\mathcal{S}_f}$ は単射.
2. f の特異点 $p \in \mathcal{S}_f$ に対して, $p, f(p)$ のまわりの局所座標 $(t, x, y, z), (s, w)$ が存在し, f はこれらの局所座標を用いて以下のいずれかのように表される.
 - a) $(t, x, y, z) \mapsto (s, w) = (t, x^2 + y^2 - z^2),$
 - b) $(t, x, y, z) \mapsto (s, w) = (t, x^3 - 3tx + y^2 - z^2),$

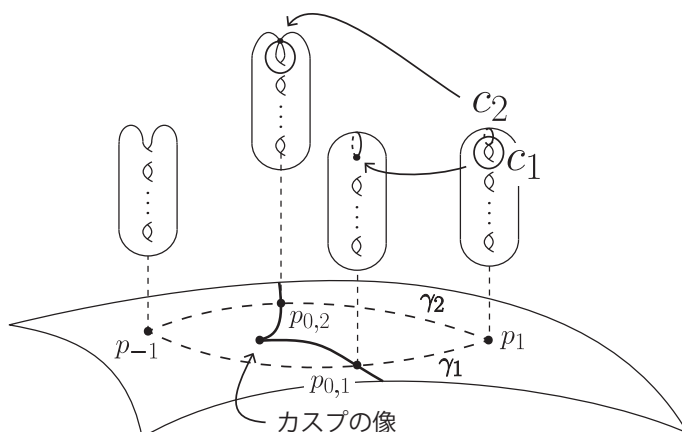
ただし, $p = (0, 0, 0, 0)$ である.

定義の二つ目の条件に現れる, 2 種類の特異点をそれぞれ**不定値折り目特異点** (indefinite fold singularity), **不定値カusp特異点** (indefinite cusp singularity) という. 簡単のため, 以下 simplified purely wrinkled fibration を SPWF と略記する.

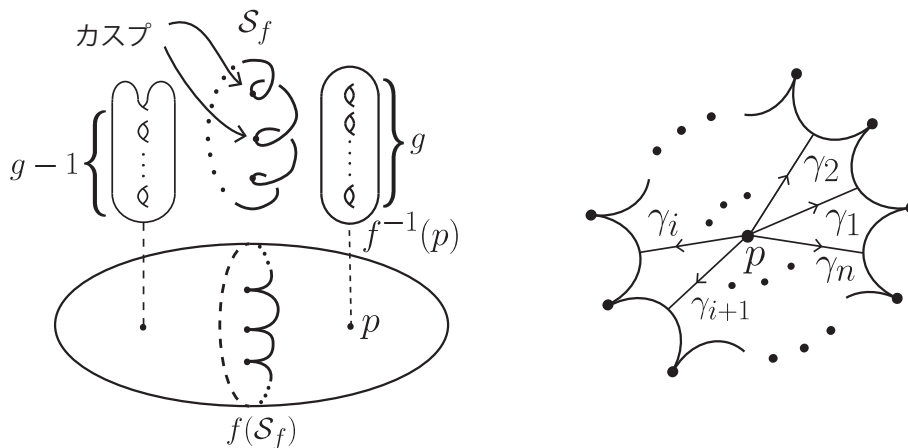
不定値折り目特異点の周りの様子を詳しくみていく. 不定値折り目特異点はその局所表示から, 全空間である 4 次元多様体の 1 次元部分多様体となり, その像も球面の 1 次元部分多様体をなす. また, 右図のように不定値折り目特異点の像と横断的に交わる道 γ をとると, その逆像には不定値の (すなわち, 指数が 1 あるいは 2 の) 特異点を持つモース関数が自然に定まることがわかる. 特に, 不定値折り目特異点の像の片側の点の一般ファイバーが, 不定値折り目特異点を含む特異ファイバーに近づくとき, 一般ファイバーの中のある単純閉曲線 c が 1 点に潰れる (右図参照). このとき現れる単純閉曲線 c を, 不定値折り目特異点の**消滅サイクル** (vanishing cycle) という.



次に不定値カusp特異点についてみていく. まず局所表示から, 不定値カusp特異点全体の集合は, 全空間の 4 次元多様体の中の有限集合となり, その”両側”には不定値折り目特異点が見ることがわかる (右図参照). さらに, 不定値カuspの”両側”に現れる不定値折り目の消滅サイクルは, 右図のように 1 点で横断的に交わるということがわかる. また, 不定値カusp特異点の周りに現れる特異点集合の像は, 値域の 1 次元部分多様体にはならないということにも注意しておく.



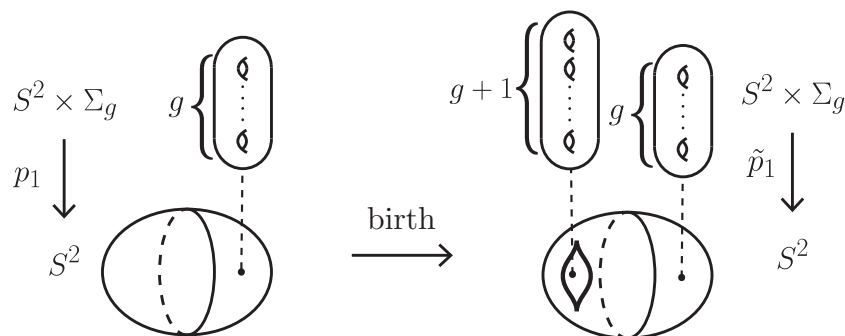
以上のことから、SPWF は下図左の図で表されるような写像である．特に、一般ファイバーの種数は特異点の像を挟んでちょうど1だけ異なる．種数の大きい方の一般ファイバーの種数 g を f の**種数**という．



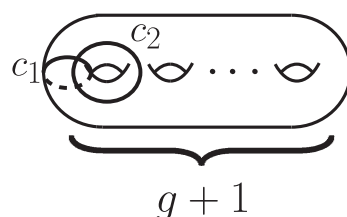
定義 2.2. M を有向 4 次元閉多様体とし、 $f : M \rightarrow S^2$ を**種数が 3 以上の SPWF** とする． S^2 上の基点 p ，道 γ_i を右上の図のようにとり、 γ_i から定まる消滅サイクルを $c_i \subset f^{-1}(p)$ で表す．このとき、単純閉曲線の列 $(c_1, \dots, c_n)$ を、 M の**曲面図式 (surface diagram)** という．

注意 2.3. 任意の有向 4 次元閉多様体が（種数が 3 以上の）SPWF を許容する（実はより強く、任意の有向 4 次元閉多様体から球面への可微分写像が、ある SPWF とホモトピックであることが知られている．詳しくは [6] を参照）．従って、全ての有向 4 次元閉多様体を曲面図式で表すことができる．また、種数が 3 以上の SPWF の全空間は、その消滅サイクルから一意に定まるので、曲面図式は有向 4 次元閉多様体から一意に定まることがわかる．しかし、種数に関する条件は外すことができない．実際、種数が 1 あるいは 2 の SPWF で、消滅サイクルは同じであるが、全空間の異なるものの存在が知られている ([3] あるいは [4] を参照)．

例 2.4. $p_1 : S^2 \times \Sigma_g \rightarrow S^2$ を、第 1 成分への射影とする．この写像は特異点を持たないため SPWF ではないが、“birth”というあるホモトピーにより SPWF に変形できる．このホモトピーはカスプを 2 つ含むような特異点を新たに生み出す操作であり、下図左のようにカスプを 2 つ含む SPWF $\tilde{p}_1 : S^2 \times \Sigma_g \rightarrow S^2$ が得られる．



$\tilde{p}_1$ の消滅サイクルをとることにより,
 $S^2 \times \Sigma_g$ ($g \geq 2$) の曲面図式 (c_1, c_2) を
 得る. ただし, c_1, c_2 は右図で表される
 単純閉曲線である.

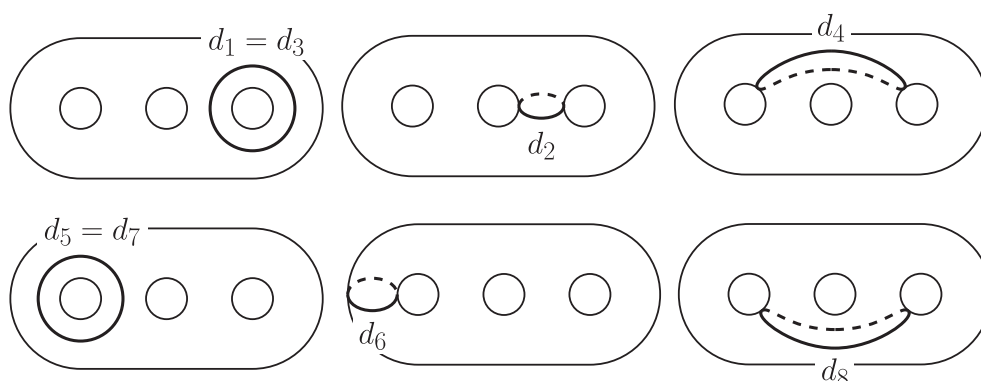


例 2.5 (Baykur [2] Example 3.1). $S^2 \times \Sigma_g \# S^1 \times S^3$ 上に, カスプを持たない種数 $g+1$ の SPWF が存在するということが知られている. この SPWF から得られる曲面図式は一つの単純閉曲線からなる. このことから, $S^2 \times \Sigma_g \# S^1 \times S^3$ ($g \geq 2$) の曲面図式 (c) を得る. ただし, c は Σ_{g+1} 内の非分離単純閉曲線である.

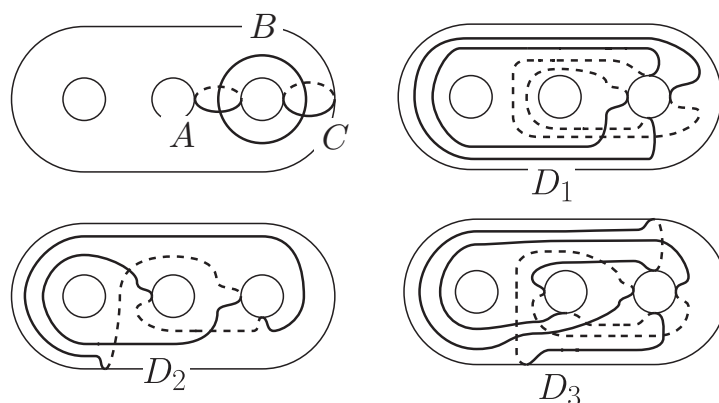
3 曲面図式の新たな具体例

本稿の冒頭でも述べた通り, 具体的な曲面図式の例はほとんど知られていない. 例えば, S^4 や $\mathbb{CP}^2$ などの基本的な多様体の曲面図式は知られていない. 今回, 以下のような曲面図式の具体例を得ることができたので報告する.

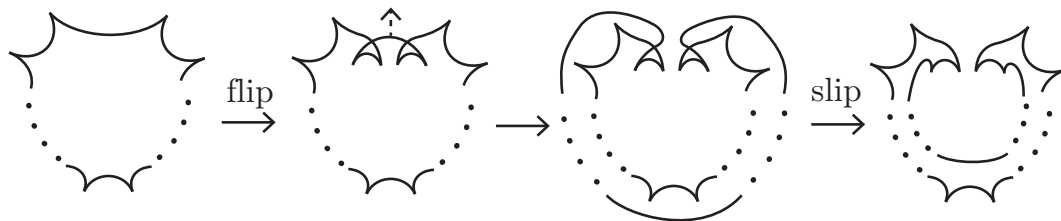
例 3.1 (H.). 以下の図で表される単純閉曲線の列 $(d_1, \dots, d_8)$ は S^4 の曲面図式である.



例 3.2 (H.). 以下の図で表される単純閉曲線の列 (A, B, C, D_i) ($i = 1, 2, 3$) は, いずれも $\#2S^1 \times S^3$ の曲面図式である.



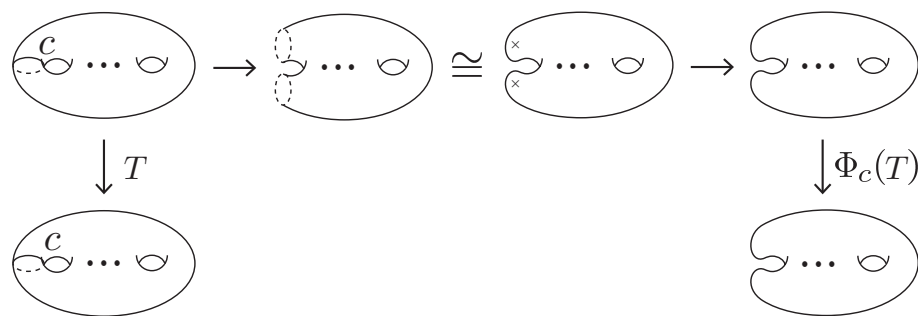
以上の例はいずれも, "flip and slip" と呼ばれる SPWF の変形による, 消滅サイクルの変化を予想することにより得ている (この変形について詳しくは, 例えば [1] を参照). この変形において特異点の像は以下の図のように変化し, SPWF としての種数は 1 大きくなる.



実際, S^4 , $\#2S^1 \times S^3$ はいずれも種数 2 の SPWF を許容し, その消滅サイクルについてもよく知られている. また, 消滅サイクルの変化を予想することにより得られた曲面図式の候補が, 本当に曲面図式になっていることは確かめるために, 次の補題を用いた.

補題 3.3. $(c_1, \dots, c_n)$ を種数 $g \geq 3$ の閉曲面上の単純閉曲線の列とする. この列がある多様体の曲面図式となる (すなわち, ある SPWF の消滅サイクルとなる) ための必要十分条件は, 以下の 2 条件を満たすことである.

1. 各 $i = 1, \dots, n$ に対して, c_i と c_{i+1} は 1 点で横断的に交わる. ただし, $c_{n+1} = c_1$ とする.
2. $t_{t_{c_1}(c_2)} \cdots t_{t_{c_{n-1}}(c_n)} \cdot t_{t_{c_n}(c_1)} \in \text{Ker}(\Phi_{c_1})$. ここで閉曲面上の単純閉曲線 c に対し, t_c は c に沿う右向きデーンツイストであり, $\Phi_c: \mathcal{M}_g(c) \rightarrow \mathcal{M}_{g-1}$ は以下の図で表されるような写像類群の間の準同型である (詳しくは [2] を参照).



注意 3.4. 上述の補題にある条件 1. はカスプ特異点の性質に由来する条件である. また条件 2. は, "unsink" という変形によりカスプ特異点をレフシェッツ特異点に変形した際は現れる, "SBLF" に由来する条件である (unsink について詳しくは [5] を, SBLF について詳しくは [2] をそれぞれ参照).

注意 3.5. これらの例はともに flip and slip によって得られる SPWF に由来していると予想されるが, 遺憾ながら筆者にはその証明を得ることができていない. より一般に, flip and slip という操作を曲面上の単純閉曲線 (同じことではあるが, 曲面の写像類群) の言葉で記述できると予想し, 現在研究を進めている.

最後に

この度は研究集会「結び目の数学 IV」に参加させて頂き、講演の機会まで下さったことを、世話人の方々に心より感謝致します。

参考文献

- [1] R. İ. Baykur, Existence of broken Lefschetz fibrations, *Int. Math. Res. Not.* **2008**(2008)
- [2] R. İ. Baykur, Topology of broken Lefschetz fibrations and near-symplectic 4-manifolds, *Pacific J. Math.* **240**(2009), 201–230
- [3] R. İ. Baykur, S. Kamada, Classification of broken Lefschetz fibrations with small fiber genera, preprint, [arXiv:math.GT/1010.5814](https://arxiv.org/abs/math.GT/1010.5814)
- [4] K. Hayano, On genus-1 simplified broken Lefschetz fibrations, *Algebr. Geom. Topol.* **11**(2011), 1267–1322
- [5] Y. Lekili, Wrinkled fibrations on near-symplectic manifolds, *Geom. Topol.* **13**(2009), 277–318
- [6] J. D. Williams, The h -principle for broken Lefschetz fibrations, *Geom. Topol.* **14**(2010), no.2, 1015–1063
- [7] J. D. Williams, Uniqueness of surface diagrams of smooth 4-manifolds, [arXiv:math.GT/1103.6263](https://arxiv.org/abs/math.GT/1103.6263)