

Minimal unknotting sequences of Reidemeister moves containing unmatched RII moves

林忠一郎、林美和、澤田実との共同研究

日本女子大学大学院 理学研究科 数理物性構造科学専攻

山田さやか

1. 導入

Reidemeister 変形とは knot diagram の局所変形のこと、図 1 の RI, RII, RIII 変形の 3 種類がある。RI 変形は 1 角形領域を作るまたは消す変形、RII 変形は 2 角形領域を作るまたは消す変形、RIII 変形は 3 角形領域における変形である。向きの付いた knot の場合、RII 変形は 2 角形の 2 辺において knot の向きがそろっている matched RII、そろっていない unmatched RII の 2 種類に分かれる。

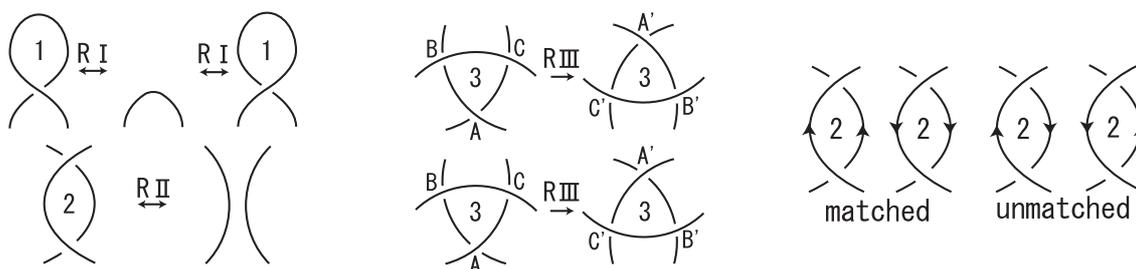


図 1:

knot diagram D_1, D_2 が同じ knot を表すならば、有限回の Reidemeister 変形で D_1 から D_2 に変形することができる。[2], [13] 参照。

knot diagram の不変量とは、knot diagram に対する量で、diagram が描いてある球面または平面の ambient isotopy で変わらないものである。但し、Reidemeister move によっては値が変化することもある

Reidemeister 変形について、様々な研究がされている。RII 変形が必要であることは Manturov や Hagge によって示されている ([10], [5])。RIII 変形の必要性は Östlund によって示されている ([11])。[8] では、cowrithe という knot diagram の不変量の差が、同じ knot の 2 つの diagram を繋ぐ Reidemeister 変形の列の中の matched RII と RIII の最小回数の下界を与えることが示されている。[4] では、平面上の knot diagram に対する extended n-coloring によって、RIII の必要回数が研究されている。Hass と Nowik は [6], [7] において、trivial knot の diagram の無限列の具体例で、交差点なしにするのに交差点数の 2 次式以上の回数の Reidemeister 変形が必要なものを与えた。この例は $7n - 1$ 個の交差点を持ち、実際に $2n^2 + 3n$ 回の Reidemeister 変形で交差点なしにできる。また、少なくとも $2n^2 + 3n - 2$ 回の Reidemeister 変形が必要なが示された。しかし、この変形列には unmatched RII が含まれておらず、また Reidemeister 変形の回数の評価も正確でなかった。

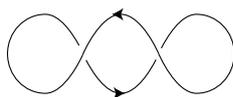


図 2:

RI と RII 変形の必要回数を合わせて正確に評価することは容易ではない。例えば図 2 の diagram は 1 回の unmatched RII 変形でも交差点なしにできるが、2 回の RI 変形でも交差点なしにすることができる。

今回、私たちは Arnold 不変量を使い、RI、unmatched RII、RIII 変形を含む或る変形列が最小回数であることを正確に評価した。

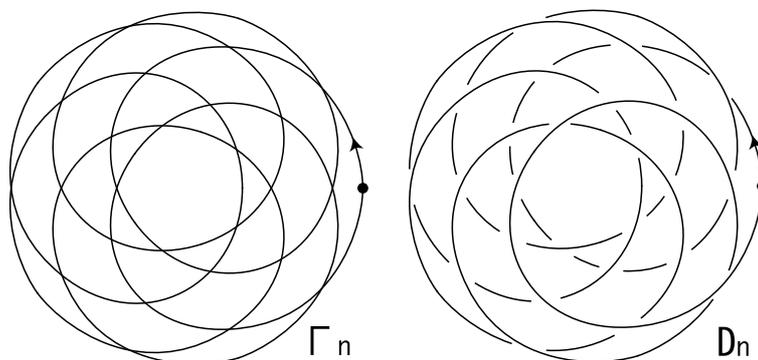


図 3:

定理 1 図 3 右側の knot diagram D_n は trivial knot を表す。ただし n は自然数で $n \geq 3$ とする。 D_n は ${}_nC_1 = n$ 回のプラス交差点を消す RI、 ${}_nC_2 = (n-1)n/2$ 回の 2 角形領域を消す unmatched RII、 ${}_nC_3 = (n-2)(n-1)n/6$ 回の positive RIII 変形によって、交差点なしの diagram に変形にできる。さらに、 D_n を交差点なしの diagram に変形するには、少なくとも ${}_nC_1 + {}_nC_2 + {}_nC_3 = n(n^2+5)/6$ 回のプラス交差点を消す RI、2 角形領域を消す unmatched RII、positive RIII 変形が必要である。よって、この変形列の長さは最小である。

RIII 変形の符号については後述する。 D_n は交差点を n^2 個持つので、変形回数は交差点数の $3/2$ 次式であり、Hass と Nowik の研究に比べて多くはない。この diagram D_n を正確に説明するための準備をする。

generic plane (spherical) curve とは向き付き circle S^1 の平面 (球面) への滑らかなめ込みで、自己交差は有限個の交差的な 2 重点のみのものをいう。

2 次元球面は平面に無限遠点をつけたものと同相である。generic plane (spherical) curve ${}_n$ は極座標の方程式 $r = 2 + \cos(n\theta/(n+1))$, $(0 \leq \theta \leq 2(n+1)\pi)$ で表されるものとする。図 3 左側のように、原点の周りを $n+1$ 周しながら 1 角形を合計 n 個つくる。定理 1 の knot diagram D_n は、 ${}_n$ の各 2 重点において、交差点の上下を ascending になるようにしたものである。 D_n は $(n+1, n)$ -torus knot の通常の diagram の交差点の上下を ascending に変えたものと同じである。diagram が ascending とは、交差点以外のところのうまい位置にとった始点から knot の向きに沿って進んだときに、各交差点において 1 番目に通ったひもの上を 2 番目のひもが通るようになっていることをいう。 D_n は始点を 1 角形の辺と交差点以外のところにとるようにする。ascending な diagram はいつも trivial knot を表す。

2 . 証明

perestroika とは generic curve の局所変形のことであり、それぞれ Reidemeister 変形の射影と考えることができる (図 4)。direct self-tangency perestroika は matched RII、inverse self-tangency perestroika は unmatched RII 変形の射影である。direct, inverse とともに、交点の数が増える方の変形を positive、減る方の変形を negative という。triple-point perestroika は RIII の射影である。triple-point perestroika の変形前後の 3 角形に対して、次のようにして符号を定める (図 5)。3 角形と交点以外のところに始点を取り、そこから curve の向きに沿って進み、3 角形の各辺にたどり着いた順に e_1, e_2, e_3 と辺に名前をつける。3 角形の向きを e_1, e_2, e_3 となぞる順とする。3 角形の各辺 e_1, e_2, e_3 について、3 角形の向きと knot の向きが一致する辺の数を q とする。そして、 $(-1)^q$ を 3

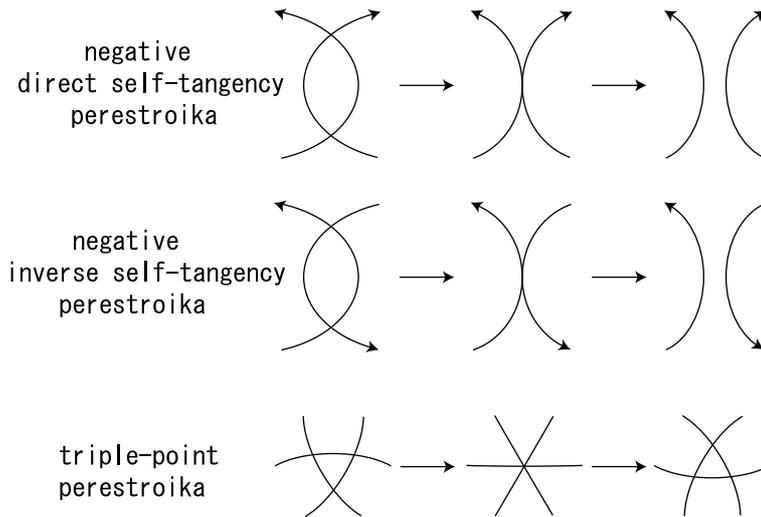


図 4:

角形の符号と定める。triple-point perestroika の positive, negative はこの 3 角形の符号によって定まる。3 角形の符号が -1 から $+1$ に変わる変形を positive、その逆を negative という。また、RIII の positive, negative も、その射影である triple-point perestroika の符号に対応させる。

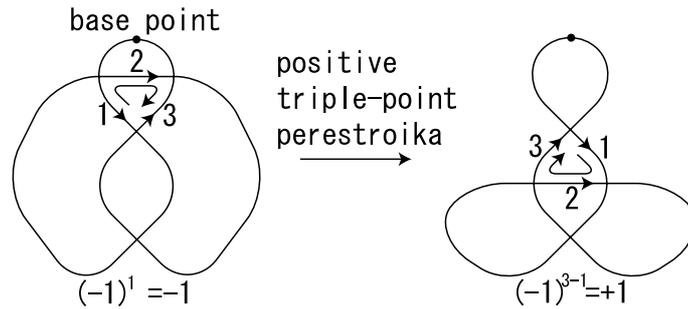


図 5:

Arnold は、次の (1) ~ (5) を満たす generic plane curve の不変量 J^+, J^-, St が存在することを示した [3]。

- (1) J^+, J^-, St は curve の向きによらない。
- (2) J^+ は positive な direct self tangency perestroika で 2 増える。inverse self tangency perestroika, triple-point perestroika では変わらない。
- (3) J^- は positive な inverse self tangency perestroika で 2 減る。direct self tangency perestroika, triple-point perestroika では変わらない。
- (4) St は positive な triple point perestroika で 1 増える。self tangency perestroika では変わらない。
- (5) 図 6 の plane curves $K_i, i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ に対して次の初期値をとる。
 $J^+(K_0) = 0, J^-(K_0) = -1, St(K_0) = 0,$
 $J^+(K_{i+1}) = -2i, J^-(K_{i+1}) = -3i, St(K_{i+1}) = i, \text{ where } i \geq 0.$

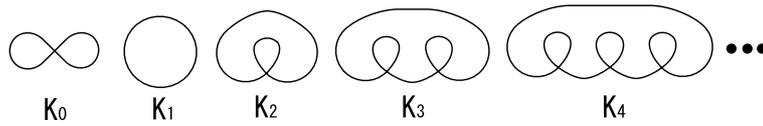


図 6:

Polyak は J^+, J^- の関係式 $J^+ = J^- + n$ を示した [12]。 n は curve の交点の数である。また、 $J^+/2 + St$ は平面ではなくて球面上で考えても spherical curve の不変量であることが知られている [1]。すなわち、球面上のどこに無限遠点をとっても値が変わらない。この2つの結果より、spherical curve の不変量として $J^-(\Gamma)/2 + St(\Gamma) = J^+(\Gamma)/2 + St(\Gamma) - n/2$ を得る。

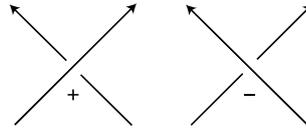


図 7:

knot diagram の交差点の符号は、各交差点において、上を通るひもから下を通るひもへの丸矢印の向きが、反時計回りなら +1、時計回りなら -1 と決める (図 7)。

writhe とは、knot diagram の不変量で、knot diagram の交差点全ての符号の和である。writhe の値はプラス交差点を作る RI 変形で +1、マイナス交差点を作る RI 変形で -1 変化する。RII、RIII 変形では変化しない。

D を球面上の knot diagram、 \bar{D} を D の射影である generic spherical curve とする。 $J^-(\bar{D})/2 + St(\bar{D}) \pm w(D)/2$ は球面上の knot diagram の不変量となる。ただし w は writhe を表す。

$J^-/2 + St \pm w/2$ の Reidemeister 変形での値の変化は次のようになる。

定理 2 $J^-/2 + St - w/2$ は、マイナス交差点をつくる RI、matched RII 変形で変化しない。プラス交差点をつくる RI、unmatched RII、negative RIII 変形で 1 減る。

$J^-/2 + St + w/2$ は、プラス交差点をつくる RI、matched RII 変形で変化しない。マイナス交差点をつくる RI、unmatched RII、negative RIII 変形で 1 減る。

Reidemeister 変形で高々 1 しか変化しないため、この不変量を用いて Reidemeister 変形の必要回数を下から評価することができる。

定理 1 の証明

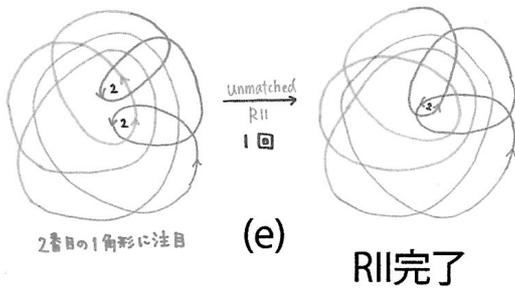
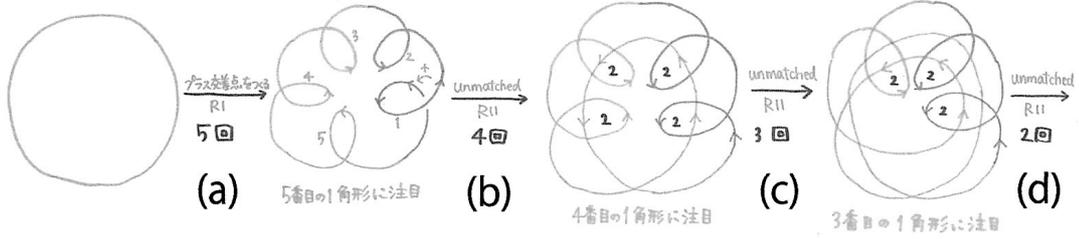
例として $n = 5$ の場合を説明する。図 8 のようにして、交差点なしの diagram を D_5 に変形することができる。

まず、図 8 の変形 a のようにプラス交差点をつくる RI を 5 回行う。図では交差点の上下が潰れているが、ascending になっているとする。できた 5 つの 1 角形を knot の向きに沿って現れる順に s_1, s_2, s_3, s_4, s_5 と名付ける。

次から、2 角形領域をつくる unmatched RII を行っていく。5 番目の 1 角形に注目し、5 番目の 1 角形と他の 4 つの 1 角形それぞれの間で unmatched RII を行う (変形 b)。次に、4 番目の 1 角形に注目し、5 番目の 1 角形の中で、4 番目の 1 角形と他の 3 つの 1 角形それぞれの間で unmatched RII を行う (変形 c)。同様に、3 番目の 1 角形に注目し、4 番目の 1 角形の中で、3 番目の 1 角形と他の 2 つの 1 角形それぞれの間で unmatched RII を行う (変形 d)。最後に、2 番目の 1 角形と 1 番

定理1の証明

ここからRII



ここからRIII

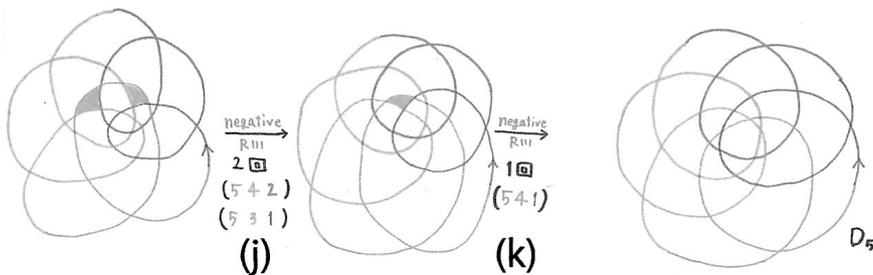
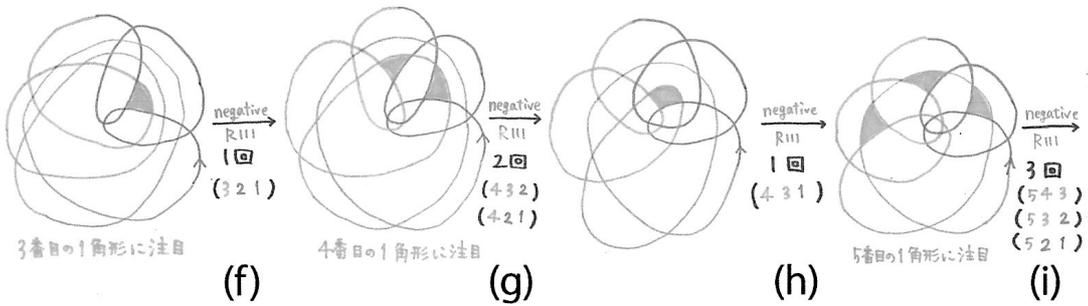


図 8:

目の1角形で unmatched RII を行う (変形 e)。ここまでで、unmatched RII 変形は終了である。

どの2つの1角形の間でも unmatched RII を行ったので、5つのもののなかから2つを選ぶ場合の数の10回行ったこととなる。

ここからは negative RIII を行っていく。3番目の1角形からはじめて、4番、5番と順に注目していく。それぞれの1角形とそれより番号の小さい1角形からなる全ての3角形で1回ずつ RIII を行っていく。まず、3番目に注目し、3番、2番、1番の1角形の arc のなす3角形で RIII をする (変形 f)。つぎに、4番目に注目して、4, 3, 2と4, 2, 1の3角形それぞれで RIII をする (変形 g)。さらに、4, 3, 1の3角形で RIII をする (変形 h)。最後に、5番目に注目して、5, 4, 3と5, 3, 2と5, 2, 1の3角形それぞれで RIII をする (変形 i)。その後、5, 4, 2と5, 3, 1の3角形それぞれで RIII をする (変形 j)。そして、5, 4, 1の3角形で RIII をする (変形 k)。これで、 D_5 が得られた。

5つの1角形の中から3つ選んで出来る全ての3角形について negative RIII を行ったので、5つのもののなかから3つを選ぶ場合の数の10回行ったこととなる。また、3角形をなす辺を含む1角形を大きい方から a, b, c とすると、negative RIII は $(a, b - c, c)$ の辞書式順序に従って行う。

全部で、プラス交差点をつくる RI 変形を5回、2角形領域をつくる unmatched RII 変形を10回、negative RIII 変形を10回行った。

ここでは詳細を述べないが、一般の自然数 n に対しても同様に、 ${}_n C_1 = n$ 回のプラス交差点をつくる RI、 ${}_n C_2 = (n-1)n/2$ 回の2角形領域をつくる unmatched RII、 ${}_n C_3 = (n-2)(n-1)n/6$ 回の negative RIII 変形で、交差点なしの diagram から D_n を作ることができることがわかった。

$J^-/2 + St - w/2$ を計算する。交差点なしの diagram については $(J^-/2 + St - w/2)(\) = 0$ である。また、定理2と今の変形より、 $(J^-/2 + St - w/2)(D_n) = -{}_n C_1 - {}_n C_2 - {}_n C_3 = -n(n^2 + 5)/6$ である。よって、交差点なしの diagram から D_n を作るには少なくとも $n(n^2 + 5)/6$ 回の、プラス交差点をつくる RI、unmatched RII、negative RIII 変形が必要である。

ゆえに、この変形列が Reidemeister 変形の最小回数を実現していると言える。□

参考文献

- [1] F. Aicardi, Tree-like curves, in it Singularities and bifurcations, ed. V.I. Arnold, *Adv. Soviet Math.* **21** (Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1994), pp. 1-31.
- [2] J.W. Alexander and G.B. Briggs, On types of knotted curves, *Ann. of Math.* **28** (1926/27) 562-586.
- [3] V.I. Arnold, Plane curves, their invariants, perestroikas and classifications, in it Singularities and bifurcations, ed. V.I. Arnold, *Adv. Soviet Math.* **21** (Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1994), pp. 39-91.
- [4] J. Carter, M. Elhamdadi, M. Saito, S. Satoh, A lower bound for the number of Reidemeister moves of type III, *Topology Appl.* **153** (2006) 2788-2794.
- [5] T.J. Hagge, Every Reidemeister move is needed for each knot type. *Proc. Amer. Math. Soc.* **134** (2006) 295-301.
- [6] J. Hass and T. Nowik, Invariants of knot diagrams, *Math. Ann.* **342** (2008) 125-137.
- [7] J. Hass and T. Nowik, Unknot diagrams requiring a quadratic number of Reidemeister moves to untangle, *Discrete Comput. Geom.* **44** (2010) 91-95.

- [8] C. Hayashi, A lower bound for the number of Reidemeister moves for unknotting, *J. Knot Theory Ramifications* **15** (2006) 313–325.
- [9] C. Hayashi and M. Hayashi, Minimal sequences of Reidemeister moves on diagrams of torus knots, *Proc. Amer. Math. Soc.* **139** (2011) 2605–2614.
- [10] V.O. Manturov, *Knot Theory*. (CRC Press, 2004).
- [11] O.-P. Östlund, Invariants of knot diagrams and relations among Reidemeister moves, *J. Knot Theory Ramifications* **10** (2001) 1215–1227.
- [12] M. Polyak, Invariants of curves and fronts via Gauss diagrams, *Topology* **37** (1998) 989–1009.
- [13] K. Reidemeister, Elementare Begründung der Knotentheorie, *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg* **5** (1926) 24–32.
- [14] H. Whitney, On regular closed curves in the plane, *Compos. Math.* **4** (1937) 276–284.

〒 1 1 2 - 8 6 8 1

東京都文京区目白台 2 - 8 - 1

日本女子大学大学院理学研究科

数理物性構造科学専攻

m1136008ys @ gr.jwu.ac.jp

山田さやか