

Local $\text{Aut}(F_n)$ -representation of braids: classification and application

伊藤 哲也*

1 Introduction

F_n を $x_1, \dots, x_n$ で生成される自由群とし、 $\text{Aut}(F_n)$ の元 τ が

$$\tau(x_j) = x_j \quad (j \neq i, i+1), \quad \tau(x_i), \tau(x_{i+1}) \in \langle x_i, x_{i+1} \rangle$$

を満たすとき τ を i -local automorphism と呼ぶ。 i -Local automorphism τ の $\langle x_i, x_{i+1} \rangle = F_2$ への制限 $c(\tau) : F_2 \rightarrow F_2$ を τ の core と呼ぶ。 Braid 群 B_n の $\text{Aut}(F_n)$ 表現で、次のような特別な性質を持つものを考える。

定義 1. 各 $i = 1, 2, \dots, n-1$ に対し生成元の像 $\Theta(\sigma_i)$ が i -local となる群準同型 $\Theta : B_n \rightarrow \text{Aut}(F_n)$ を Local $\text{Aut}(F_n)$ -表現と呼ぶ。

$\Theta(\sigma_i)$ の core を $\tau_i \in \text{Aut}(F_2)$ とする。以下、Local $\text{Aut}(F_n)$ -表現 Θ を組 $(\tau_1, \dots, \tau_{n-1}) \in \text{Aut}(F_2)^{n-1}$ を用いて表すことにする。このような Braid 群の $\text{Aut}(F_n)$ 表現はこれまでに様々な形で現れている。特に、 $\tau_1 = \tau_2 = \dots = \tau_{n-1}$ の場合は Wada-type representation と呼ばれ、和田 [3] により考察され、(結び目群の一般化にあたる) 結び目の群不変量が構成されている。Wada-type representation は (bi)rack, (bi)quandle と密接に関連し、Wada-type representation を用いて群 G 上に (bi)rack あるいは (bi)quandle の構造を定めることができる。これらの (bi)quandle 構造は古典的に知られている群の conjugation quandle の一般化にあたる。また、筆者は [1] において、Wada-type representation の分類を行ない、和田による予想「Wada-type representation は本質的に 7 つである」を肯定的に解決した。

Wada-type representation と同様に、Local $\text{Aut}(F_n)$ -representation から結び目の群不変量を構成することができる。講演では主に結び目への応用について話したので、この報告集では講演では触れられなかった $\text{Aut}(F_n)$ 表現の分類結果について簡潔に報告すると共に、考察すべき課題及び今後の展望について述べる。詳細については [2] を参照のこと。

2 Classification

$|i-j| > 1$ の時、定義から任意の i -local Automorphism と j -local Automorphism は可換であるため、 $(\tau_1, \dots, \tau_{n-1})$ が Local $\text{Aut}(F_n)$ -representation を定める必要十分条件は (τ_i, τ_{i+1}) がすべての i に対し Local $\text{Aut}(F_3)$ -representation を定めることである。従って Local $\text{Aut}(F_n)$ representation の分類は 3-braid B_3 の場合に帰着される。

*東京大学数理科学研究科, e-mail: tetitoh@ms.u-tokyo.ac.jp

Local $\text{Aut}(F_3)$ -representation は braid 群の symmetry に由来する二つの symmetry を持つ。 $\Theta = (\tau, \kappa)$ を local $\text{Aut}(F_3)$ -representation とする。

Inverse $\Theta^{-1}(\sigma_1) = \tau', \Theta^{-1}(\sigma_2) = \kappa'$ とすると (τ', κ') は local $\text{Aut}(F_3)$ -representation を定める。

Reverse F_2 を x, y で生成される自由群とし、 $\text{rev} : F_2 \rightarrow F_2$ を word 中の x と y を入れ替える写像とする。例えば、 $\text{rev}(xyx^2) = yxy^2$ となる。また、 $\tau^{\text{rev}}, \kappa^{\text{rev}} \text{Aut}(F_2)$ を $\tau^{\text{rev}}(x) = \text{rev} \circ \kappa(y)$, $\tau^{\text{rev}}(y) = \text{rev} \circ \kappa(x)$, $\kappa^{\text{rev}}(x) = \text{rev} \circ \tau(y)$, $\kappa^{\text{rev}}(y) = \text{rev} \circ \tau(x)$ で定める。すると $(\tau^{\text{rev}}, \kappa^{\text{rev}})$ は Local $\text{Aut}(F_3)$ -representation を定める。

Inverse symmetry は braid の紐の向きを逆にする (上下の) 対称性であり、Reverse symmetry は、braid の紐を左から右に (1,2,3) と数えるものを右から左へ (3,2,1) と数えることに対応する (左右の) 対称性である。Reverse symmetry の定義が少し複雑なので、例を挙げておく。

例 1. $(\tau, \kappa) \in \text{Aut}(F_2)^2$ を $\tau(x) = xyx^{-1}$, $\tau(y) = x$, $\kappa(x) = xy^{-1}x^{-1}$, $\kappa(y) = x^{-1}$ とすると (τ, κ) は Local $\text{Aut}(F_3)$ -representation Θ を定める。 Θ の $\text{reverse}(\tau^{\text{rev}}, \kappa^{\text{rev}})$ は $\tau^{\text{rev}}(x) = y^{-1}$, $\tau^{\text{rev}}(y) = yx^{-1}y^{-1}$, $\kappa^{\text{rev}}(x) = y$, $\kappa^{\text{rev}}(y) = yxy^{-1}$ で与えられる。

この二つの symmetry で移りあうものを同一視すると、Local $\text{Aut}(F_3)$ -representation は次のように分類される。

定理 1. F_2 を x, y で生成される階数 2 の自由群とする。Local $\text{Aut}(F_3)$ -representation $\Theta = (\tau, \kappa) \in \text{Aut}(F_2)^2$ に対して $A = \tau(x)$, $B = \tau(y)$, $C = \kappa(x)$, $D = \kappa(y)$ とする。(Reverse and inverse symmetry で移りあうものを除くと) (A, B, C, D) のは次のリストのいずれかである。

- $(T) \quad (A, B, C, D) = (x, y, x, y).$
- $(A_r - 0) \quad (A, B, C, D) = (x^r y x^{-r}, x, x^r y x^{-r}, x).$
- $(A_r - 1) \quad (A, B, C, D) = (x^r y x^{-r}, x, x^r y^{-1} x^{-r}, x^{-1}).$
- $(A_r - 2) \quad (A, B, C, D) = (x^{-r} y^{-1} x^r, x^{-1}, x^r y x^{-r}, x).$
- $(A_r - 3) \quad (A, B, C, D) = (x^{-r} y^{-1} x^r, x^{-1}, x^r y^{-1} x^{-r}, x^{-1}).$
- $(B_r - 1) \quad (A, B, C, D) = (x^{-r} y x^r, x^{-1}, x^r y x^{-r}, x^{-1}).$
- $(B_r - 2) \quad (A, B, C, D) = (x^{-r} y x^r, x^{-1}, x^r y^{-1} x^{-r}, x).$
- $(C - 0) \quad (A, B, C, D) = (xy^{-1}x, x, xy^{-1}x, x).$
- $(C - 1) \quad (A, B, C, D) = (xyx, x^{-1}, xyx, x^{-1}).$
- $(C - 2) \quad (A, B, C, D) = (xy^{-1}x, x, xyx, x^{-1}).$
- $(C - 3) \quad (A, B, C, D) = (xyx, x^{-1}, xy^{-1}x, x^{-1}).$
- $(D - 0) \quad (A, B, C, D) = (xy^{-1}x^{-1}, xy^2, xy^{-1}x^{-1}, xy^2).$
- $(D - 1) \quad (A, B, C, D) = (xyx^{-1}, y^2x^{-1}, x^{-1}y^{-1}x, y^2x).$
- $(D - 2) \quad (A, B, C, D) = (x^{-1}yx, y^2x, x^{-1}yx, x^{-1}y^2).$
- $(D - 3) \quad (A, B, C, D) = (xy^{-1}x^{-1}, y^2x^{-1}, x^{-1}yx, x^{-1}y^2).$
- $(D - 4) \quad (A, B, C, D) = (xy^{-1}x^{-1}, xy^2, xyx^{-1}, y^2x^{-1}).$
- $(D - 5) \quad (A, B, C, D) = (x^{-1}yx, x^{-1}y^2, xyx^{-1}, y^2x^{-1}).$
- $(D - 6) \quad (A, B, C, D) = (x^{-1}yx, xy^2, xy^{-1}x^{-1}, xy^2).$

証明の方針は [1] で行った Wada-type の分類と同様である。word A, B の形に応じて細かく場合分けをし、丁寧に条件を調べることで証明される。

3 展望

最後に Local $\text{Aut}(F_n)$ -representation の今後の展望及び考察すべき問題を述べる。

1. Conceptual understanding of Local $\text{Aut}(F_n)$ -representation

分類定理の証明は、数え上げによるものであり、Local $\text{Aut}(F_n)$ -representation の存在についての幾何的な意味を与えているわけではない。Braid 群の対象性や幾何的性質に基づいた、Local $\text{Aut}(F_n)$ -representation の分類定理の証明を与えることは興味深い問題である。

2. Group-valued invariants

Artin 表現を用いた結び目群表示の一般化を考えると、Local $\text{Aut}(F_n)$ -representation Θ から群に値をとる結び目 K の不変量 $G_\Theta(K)$ が定義される。多くの Wada-type representation に対しては、群不変量は K の double branched covering の基本群などから決定されてしまう。一般の $\text{Aut}(F_n)$ -representation Θ についてはどうだろうか？

3. Braid index estimation

講演で述べたように、不変量 $G_\Theta(K)$ を用いて braid index の評価ができる。この評価は良いものだろうか？特に、Morton-Frank-Williams 不等式が sharp では無いような knot の Braid index を G_Θ を用いて決定できるだろうか？

4. Linear representation and finite quotient of braid groups

Local $\text{Aut}(F_n)$ -representation Θ から、Magnus 表現 $M_\Theta : B_n \rightarrow \text{GL}(n; \mathbb{Z}[t, t^{-1}])$ を得ることができる。これは braid 群の Burau 表現の一般化となっている。これらの表現はこれまでに知られている表現とどのように関係しているだろうか？また、Magnus 表現または Local $\text{Aut}(F_n)$ -representation を用いて得られる Braid 群の finite quotient group はどのようなものだろうか？(補足：Braid 群は residually finite であるため、多数の finite quotient を持つことが分かっている。しかし、実際に(具体的に)知られている例は少なく、Braid 群の finite quotient を構成することは興味深い問題となっている。)

5. (Twisted) Alexander polynomials

群不変量 G_Θ の (Twisted) Alexander 多項式を考えると knot(link) の Alexander 多項式の一般化にあたる多項式不変量が定義できる。(Twisted) Alexander 多項式で成り立つ諸結果 (genus の評価、sliceness criterion, etc...) をこれらの多項式不変量に拡張できるだろうか？

6. Generalization of (bi)quandles

Wada-type representation は (bi)quandle と密接に関連していた。Local $\text{Aut}(F_n)$ -representation に対しても対応する代数構造を考える (biquandle のさらなる一般化) を考えることができる。このようなものは knot を研究する上で有用だろうか？

参考文献

- [1] T. Ito, *The classification of Wada-type representations of braids*, arXiv:1105.2633
- [2] T. Ito, *Local $\text{Aut}(F_n)$ -representations of braid groups*, In preparation.
- [3] M. Wada, *Group invariants of links*, Topology, **31**, (1992), 399-406.