

Examples of Finite Type Invariants for Virtual Knots

櫻井みぎ和 (東京女子大学)*

概 要

Virtual Knot Theory における finite type invariant は, M. Goussarov, M. Polyak, O. Viro によって定義された. 現在, finite type invariant の具体的な例はあまり知られていない. 本稿では, finite type invariant になる例と, ならない例を紹介する.

1. はじめに

Knot Theory における finite type invariant は, 特異点と real crossing との関係式



によって定義される ([2]). Knot Theory では, 具体的な finite type invariant の例が知られている. 特に, 最も次数の低い finite type invariant は, degree 2 の finite type invariant であり, コンウェイ多項式の 2 次の係数であることが示されている. 一方, Virtual Knot Theory における finite type invariant は, 特異点の代わりに semi-virtual crossing と呼ばれる crossing と real crossing, virtual crossing との関係式



によって定義される ([4]). Virtual Knot Theory では, Knot Theory の finite type invariant のような具体的な finite type invariant の例はあまり知られていない. また, Knot Theory における finite type invariant と同様に, long virtual knot に対する最も次数の低い finite type invariant は, degree 2 の finite type invariant であることが知られている ([4]).

本稿では, long virtual knot に対する degree 2 の finite type invariant を具体的に与え, virtual knot に対する finite type invariant にならない例を与える. ここで紹介する invariant の例は, crossing の符号を足し合わせる操作によって得られる invariant である. 少し定義が異なると有限型になる場合とならない場合があることを示す.

2. degree 2 の finite type invariant

real crossing c の符号を図 1 のように定義し, $\text{sign}(c)$ で表わす. long virtual knot K において, K の端から端まで knot に沿って進むとき, 初めて通過する under crossing に 1 から順に番号を付ける. $N(K)$ は番号の付いた K の real crossing 全体の集合とする. $N(K)$ の元 d で K を smoothing し, d の番号よりも小さい番号の付いた全ての crossing で crossing change して得られる diagram を K^d とする. K^d は long virtual knot L^d と closed path C^d から成る (図 2).

* 〒167-8585 東京都杉並区善福寺 2-6-1 東京女子大学大学院 理学研究科
e-mail: migiwa@cis.twcu.ac.jp

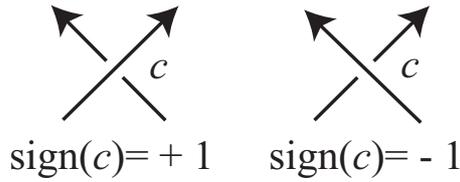


図 1 : real crossing c の符号

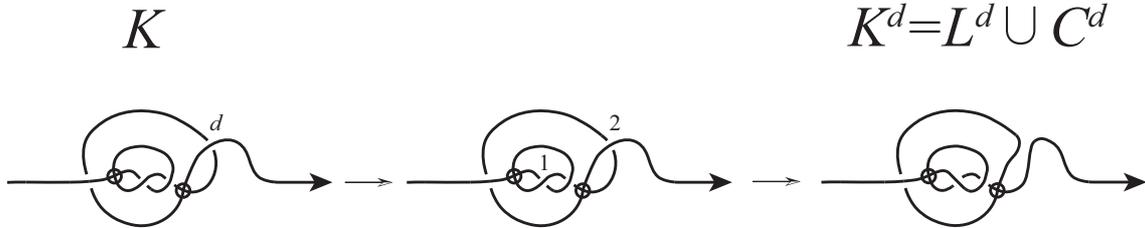


図 2 : K から K^d を得る手順

このとき, K^d の *linking number* $\text{lk}(K^d)$ は以下のように定義される.

$$\text{lk}(K^d) = \frac{1}{2} \sum_{c \in L^d \cap C^d} \text{sign}(c).$$

ここで, $L^d \cap C^d$ は L^d と C^d との間の real crossing 全体の集合とする. lk を用いて, 以下のように long virtual knot K に対する invariant $q(K)$ を定義する.

Definition 2.1.

$$q(K) = \sum_{d \in N(K)} \text{sign}(d) \text{lk}(K^d).$$

Theorem 2.2. q は long virtual knot の degree 2 の finite type invariant である.

Sketch Proof. $K \left(\begin{array}{c} \diagdown \\ \diagup \end{array}, \begin{array}{c} \diagdown \\ \diagup \end{array} \right)$ は 2 つの semi-virtual crossing を持つ long virtual knot diagram を表す. $K \left(\begin{array}{c} \diagdown \\ \diagup \end{array}_{c_1}, \begin{array}{c} \diagdown \\ \diagup \end{array}_{c_2} \right)$ は各 semi-virtual crossing をそれぞれ real crossing c_1, c_2 に置き換えた long virtual knot diagram である. c, d を $N \left(K \left(\begin{array}{c} \diagdown \\ \diagup \end{array}, \begin{array}{c} \diagdown \\ \diagup \end{array} \right) \right)$ の異なる 2 つの元とする. このとき, $K \left(\begin{array}{c} \diagdown \\ \diagup \end{array}, \begin{array}{c} \diagdown \\ \diagup \end{array} \right)^d$ の c に対応する crossing を c^d で表す. $K \left(\begin{array}{c} \diagdown \\ \diagup \end{array}, \begin{array}{c} \diagdown \\ \diagup \end{array} \right)$ における q の値を計算すると, 以下が得られる.

$$q \left(K \left(\begin{array}{c} \diagdown \\ \diagup \end{array}, \begin{array}{c} \diagdown \\ \diagup \end{array} \right) \right) = \frac{1}{2} \{ \varepsilon_1 \delta_2 \text{sign}(c_1) \text{sign}(c_2^{c_1}) + \varepsilon_2 \delta_1 \text{sign}(c_2) \text{sign}(c_1^{c_2}) \}. \quad (1)$$

ここで, $i, j = 1, 2, i \neq j$ に対して,

$$\varepsilon_i = \begin{cases} 1 & \left(c_i \in N \left(K \left(\begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \diagdown \quad \diagup \end{array} \right) \right) \right) \\ 0 & \left(c_i \notin N \left(K \left(\begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \diagdown \quad \diagup \end{array} \right) \right) \right) \end{cases},$$

$$\delta_i = \begin{cases} 1 & (c_i \in L^{c_j} \cap C^{c_j}) \\ 0 & (c_i \notin L^{c_j} \cap C^{c_j}) \end{cases}$$

とする.

これを用いて, 3つの semi-virtual crossing を持つ long virtual knot diagram における q の値を求める. 式(1)より,

$$q \left(K \left(\begin{array}{c} \bigcirc \quad \bigcirc \quad \diagdown \\ \diagdown \quad \diagup \quad \bigcirc \end{array} \right) \right) = q \left(K \left(\begin{array}{c} \bigcirc \quad \bigcirc \quad \bigcirc \\ \bigcirc \quad \bigcirc \quad \bigcirc \end{array} \right) \right).$$

よって,

$$q \left(K \left(\begin{array}{c} \bigcirc \quad \bigcirc \quad \bigcirc \\ \bigcirc \quad \bigcirc \quad \bigcirc \end{array} \right) \right) = 0.$$

また, $q \left(\begin{array}{c} \text{---} \bigcirc \text{---} \\ \text{---} \bigcirc \text{---} \\ \text{---} \bigcirc \text{---} \end{array} \right) \neq 0$ なので, q は degree 2 の finite type invariant である. □

3. finite type ではない virtual knot invariant

この節では, finite type invariant にならない例を 2 つ紹介する.

まず, 1 つ目の invariant を定義する. 上下の情報を除いた real crossing を *flat crossing* という. virtual knot K に対して, K の real crossing d で smoothing し, 全ての real crossing を flat crossing に置き換えて得られる diagram を K_d とする. K_d の成分に 1 と 2 の order を付けたとき, K_d の flat crossing e の符号を図 3 のように定義し, $\text{sgn}(e)$ で表わす.

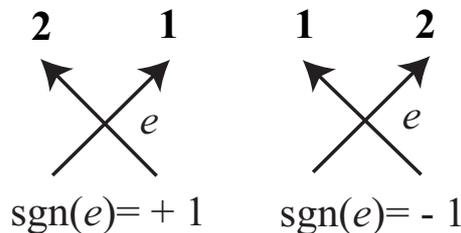


図 3 : flat crossing e の符号

このとき, d の intersection index $i(d)$ は以下のように定義される ([5]).

$$i(d) = \sum_{e \in 1 \cap 2} \text{sgn}(e).$$

ここで、 $1 \cap 2$ は 1 と 2 の間の K_d の flat crossing 全体の集合とする。intersection index i を用いて、以下のように virtual knot K に対する invariant $p(K)$ を定義する。

Definition 3.1 ([3]).

$$p(K) = \sum_{d \in C(K)} \text{sign}(d) |i(d)|.$$

ここで、 $C(K)$ は K の real crossing 全体の集合とする。

Lemma 3.2. 2 以上の自然数 n に対して、

$$p \left(\left(\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ i \\ \vdots \\ n \end{array} \right) \right) = \begin{cases} 2 & (n=2) \\ 0 & (n=3) \\ -p \left(\left(\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ n-1 \end{array} \right) \right) & (n \neq 2, n \neq 3). \end{cases}$$

ここで、左辺の diagram は、 i 番目の crossing は real crossing であり、それ以外の部分は semi-virtual crossing と virtual crossing が交互に現れる $n-1$ 個の semi-virtual crossing を持つ diagram である。右辺の diagram は、semi-virtual crossing と virtual crossing が交互に現れる $n-1$ 個の semi-virtual crossing を持つ diagram である。

Lemma 3.2 を用いて、以下のような結果を得た。

Theorem 3.3. p は virtual knot の finite type invariant ではない。

Sketch Proof. 2 以上の自然数 n に対して以下が成り立つことを示す。

$$p \left(\left(\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ n \end{array} \right) \right) = \begin{cases} 2 & (n=2) \\ (-1)^n 2^{n-2} & (n \neq 2) \end{cases}. \quad (2)$$

$n=2$ のとき、

$$p \left(\left(\begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array} \right) \right) = p \left(\bigcirc \right) - 2p \left(\infty \right) + p \left(\left(\begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array} \right) \right) = 2.$$

3以上の自然数 n に対して, n に関する帰納法で (2) が成り立つことを示す. $n = 3$ のとき,

$$\begin{aligned}
 p \left(\left(\begin{array}{c} \text{vertical chain of crossings} \\ \uparrow \end{array} \right) \right) &= -p \left(\text{circle with arrow} \right) + 3p \left(\text{figure-eight with arrow} \right) \\
 &\quad - 3p \left(\text{crossing with arrow} \right) + p \left(\text{vertical chain of crossings with arrow} \right) \\
 &= -2.
 \end{aligned}$$

$n = k (\geq 3)$ のとき, (2) が成り立つと仮定する. このとき,

$$\begin{aligned}
 p \left(\left(\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ k+1 \\ \uparrow \end{array} \right) \right) &= p \left(\left(\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ i \\ \vdots \\ k+1 \\ \uparrow \end{array} \right) \right) - p \left(\left(\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ \vdots \\ k \\ \uparrow \end{array} \right) \right) \\
 &= -2p \left(\left(\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ \vdots \\ k \\ \uparrow \end{array} \right) \right) \\
 &= (-1)^{k+1} 2^{(k+1)-2}.
 \end{aligned}$$

よって, $n = k + 1$ のときも成り立つ. □

次に, 2つ目の invariant を定義する. virtual knot K に対して, K の real crossing d からスタートして d に戻るまでに通過する real crossing の個数が奇数となる時, d を *odd crossing* と呼ぶ. このとき, K の *self-linking invariant* $J(K)$ は以下で定義される.

Definition 3.4 ([6]).

$$J(K) = \sum_{d \in \text{Odd}(K)} \text{sign}(d).$$

ここで, $\text{Odd}(K)$ は K の odd crossing 全体の集合とする.

Theorem 3.5. J は virtual knot の finite type invariant ではない.

