

Simple ribbon fusions for links

岸本 健吾 (大阪工業大学)

(渋谷哲夫氏 (大阪工業大学) ・ 塚本達也氏 (大阪工業大学) との共同研究)

1 はじめに

本報告において, [1, 2] で定義された絡み目の局所変形である simple ribbon move の拡張となる simple ribbon fusion を導入する.

絡み目 ℓ から 1 回の simple ribbon fusion で得られた絡み目を L とするとき, $g(L) \geq g(\ell)$ が成り立ち, 特に等号成立の必要十分条件は ℓ と L が同値な絡み目であることを示す.

また simple ribbon fusion に付随する attendant link を用いることによって, 自明な結び目から 1 回の simple ribbon fusion で得られた結び目が prime であるための十分条件を与える.

2 Simple ribbon fusions for links

simple ribbon fusion とは S^3 内の (向き付けられた) 絡み目 ℓ に対して定義された以下のような操作である.

定義 2.1. $\mathcal{O}$ ($= \mathcal{O}_m$) を自明な絡み目, $\mathcal{D}$ ($= \cup_{i=1}^m D_i$) を $\partial\mathcal{D} = \mathcal{O}$, $\mathcal{D} \cap \ell = \emptyset$ をみたす互いに交わらない non-singular disks, $\mathcal{B}$ ($= \cup_{i=1}^m B_i$) を互いに交わらない, ℓ と $\mathcal{O}$ の bands of fusion で以下をみたすとする.

- (1) $B_i \cap \ell = \{\text{an arc of } \ell\}$, $B_i \cap \mathcal{O} = \{\text{an arc of } \mathcal{O}_i\}$.
- (2) 各 i ($1 \leq i \leq m$) に対して, 以下をみたす j が存在する.
 - (i) $\text{int} D_i \cap \mathcal{B} = \text{int} D_i \cap B_j = \{\text{an arc of ribbon type}\}$,
 - (ii) $\text{int} \mathcal{D} \cap B_i = \text{int} D_j \cap B_i = \{\text{an arc of ribbon type}\}$.

このとき, 絡み目 L ($= \ell \oplus \partial(\mathcal{B} \cup \mathcal{D})$) は ℓ から $\mathcal{B} \cup \mathcal{D}$ に関する simple ribbon fusion で得られた, という. ここで, $\oplus$ は homological addition を意味する.

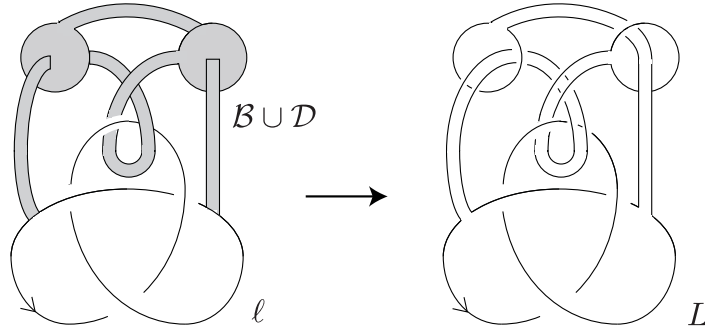


図 1: A simple ribbon fusion

n 成分絡み目 L に対して, 種数 $g(L)$ を以下のように定める.

$$g(L) = \min \left\{ \frac{2 - \chi(F) - n}{2} \mid F : L \text{ の連結なザイフェルト曲面} \right\}$$

ただし, $\chi(F)$ は F のオイラー標数である.

定理 2.2. L を絡み目 ℓ から 1 回の simple ribbon fusion で得られた絡み目とする. このとき $g(L) \geq g(\ell)$ が成り立つ. 特に等号成立の必要十分条件は ℓ と L が同値な絡み目であることである.

この定理を示すために次の補題を用意する.

補題 2.3. 以下の条件をみたす L の連結なザイフェルト曲面 F_L が存在する.

- F_L の種数が $g(L)$ である,
- $\text{int} F_L \cap \mathcal{B} = \emptyset$,
- $F_L \cap \text{int} D_i = \{\text{an arc } \rho_i \text{ and simple loops}\}$.

ただし ρ_i は $\partial \rho_i = \partial \alpha_i$ をみたす arc とし, 各 loop は図 2 のように $\alpha_i \cup \rho_i$ を含む. ここで α_i は $\alpha_i = \text{int} D_i \cap \mathcal{B}$ である arc とする.

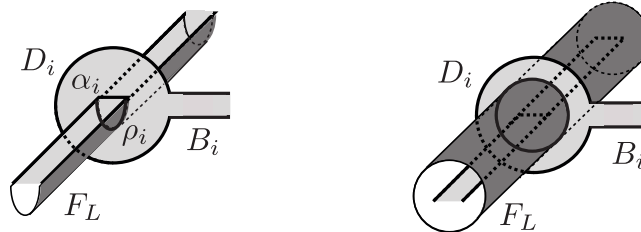


図 2: $F_L \cap \text{int} D_i$

[定理 2.2 の証明の概略]

F_L を補題 2.3 の条件をみたす L のザイフェルト曲面とする. F_L を図 3 のように, $F_L \cap \text{int} D_i$ の arc を cut して元の $B_i \cup D_i$ に沿って 1 枚の disk を張り, また各 loop を cut して 2 枚の disk を張る. この操作を全ての $F_L \cap \text{int} D$ の連結成分に行うことによって新しい曲面 F を得ることができる. この曲面 F は ℓ のザイフェルト曲面 F_ℓ といくつかの閉曲面の和集合で

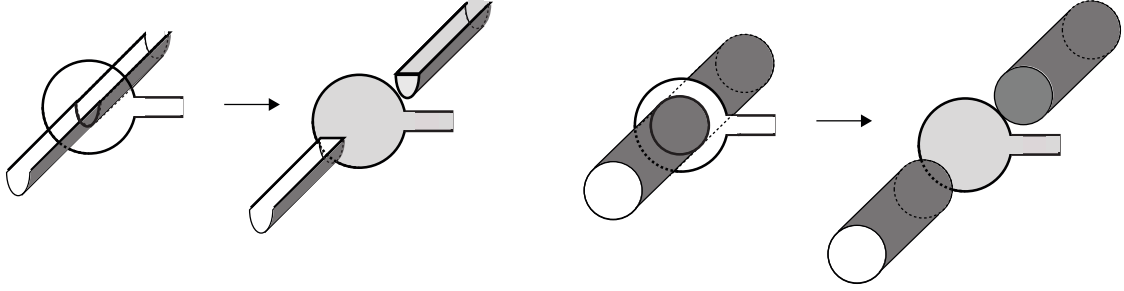


図 3:

表されている. このとき, F_L と F_ℓ のオイラー標数の差を計算することで, $\chi(F_L) \leq \chi(F_\ell)$ となることが分かる. 特に等号が成立する必要十分条件が, 任意の i に対して, $F_L \cap \text{int} D_i$ の各 arc を cut することで曲面は非連結となり, さらにこの曲面の $\partial D_i - \partial B_i$ を含む連結成分が disk となることである. このことから ℓ と L が同値な絡み目であることが導かれる.

3 An attendant link

次に simple ribbon fusion の性質を調べるために, [1] で定義された attendant link を以下のように拡張する. L を絡み目 ℓ から $B \cup D$ に関する simple ribbon fusion で得られた絡み目とする.

各 band B_i の core をとり, 各 disk D_i 上の core の 2 端点を図 4 のように自然につなぐことによって得られる絡み目 $\mathcal{L}$ を $B \cup D$ に関する attendant link という.

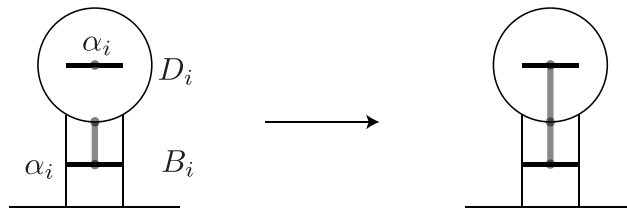


図 4: $B_i \cup D_i$ の pre-image

$\mathcal{L}$ の各成分は図 5 のような loop を埋め込んだものとなっている.

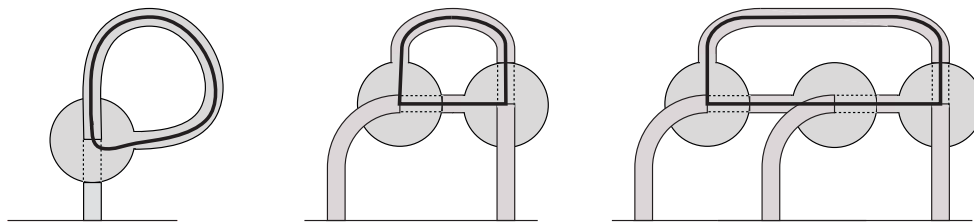


図 5:

特に自明, または prime な結び目に対する simple ribbon fusion について, attendant link の性質を通して, 得られる結び目が prime であるための十分条件を得た. 本報告では特に, 自明な結び目のときの以下の定理を紹介する.

定理 3.1. k を自明な結び目とし, K を k から 1 回の simple ribbon fusion で得られた非自明な結び目とする.

(1) $\mathcal{L}$ が結び目ならば, K は prime または square knot である. とくに K が square knot となるのは, $\mathcal{L}$ が trivial かつ $\#(\mathcal{D}) = 1$ or 2 であるときのみである.

(2) $\mathcal{L}$ が非分離的絡み目ならば K は prime である.

注意 3.2. 実際に square knot は, 自明な結び目から図 6 のような simple ribbon fusion で得られる.

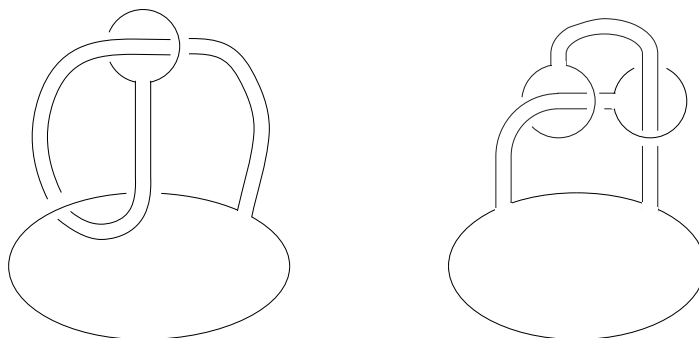


図 6: The square knot

例 3.3. K を図 7 の結び目とする. このとき $\mathcal{L}$ が Hopf link であることから, 定理 3.1 を用いて, K が prime であることが分かる.

さらに attendant link $\mathcal{L}$ が元の結び目 k に対してどのような位置にあるか, という情報も含めることで次の定理を示した.

定理 3.4. k を自明な結び目とし, K を k から 1 回の simple ribbon fusion で得られた結び目とする. もし $k \cup \mathcal{L}$ が prime であるならば, K は prime または square knot である.

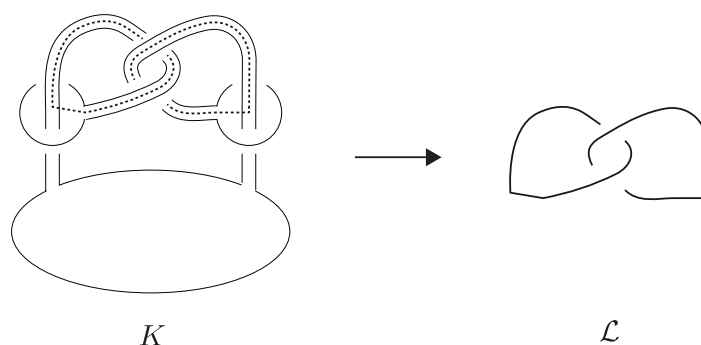


図 7:

例 3.5. 樹下・寺坂結び目 K (図 8 の結び目) は自明な結び目 k から 1 回の simple ribbon fusion で得られ, さらにその attendant link $\mathcal{L}$ との和 $k \cup \mathcal{L}$ は Whitehead link となっている. 定理 3.4 を用いることで, 樹下・寺坂結び目が素 (したがって非自明) な結び目であることがわかる.

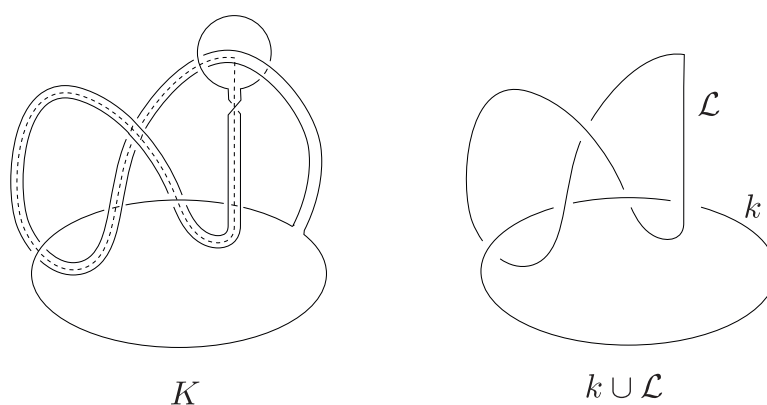


図 8: 樹下・寺坂結び目

参考文献

- [1] K. Kobayashi, T. Shibuya and T. Tsukamoto, *Simple ribbon moves for links*, to appear in Osaka J. Math.
- [2] T. Shibuya and T. Tsukamoto, *Simple ribbon moves and primeness of knots*, preprint.