

Nullification distance between links with small crossing numbers

Kai Ishihara (Imperial College London)
Dorothy Buck (Imperial College London)

1 はじめに

DNA は二重螺旋構造をしている．特に細菌やバクテリアの DNA ではそのほとんどが環状になっており，結び目や絡み目をつくる．部位特異的組み換え酵素は，2 本の 2 本鎖 DNA の特定の配列（部位）を掴み組み換えを行う．この組み換えによって DNA 結び目・絡み目の型が変わる．そこで，与えられた 2 つの結び目・絡み目に対し，何回の組み換えが必要であるかを考え距離を定義する．部位特異的組み換えが起こる部位は短いため，ほとんどの場合局所的にみれば単純な組み換えであり，band surgery であると信じられている．部位特異的組み換えは 2 つの部位の向きの状況によって inverted repeat recombination（図 1 の右上）と direct repeat recombination（図 1 の右下）に別けられる．ここでは direct repeat recombination（2 つの部位の向きが同じもしくは 2 つの部位が異なる DNA 成分にある場合）だけを考える．この組み換えは部位の向きから誘導される向きを考えることによって coherent band surgery (band 以外の部分は同じ向きになっている band surgery) とみなすことができる．

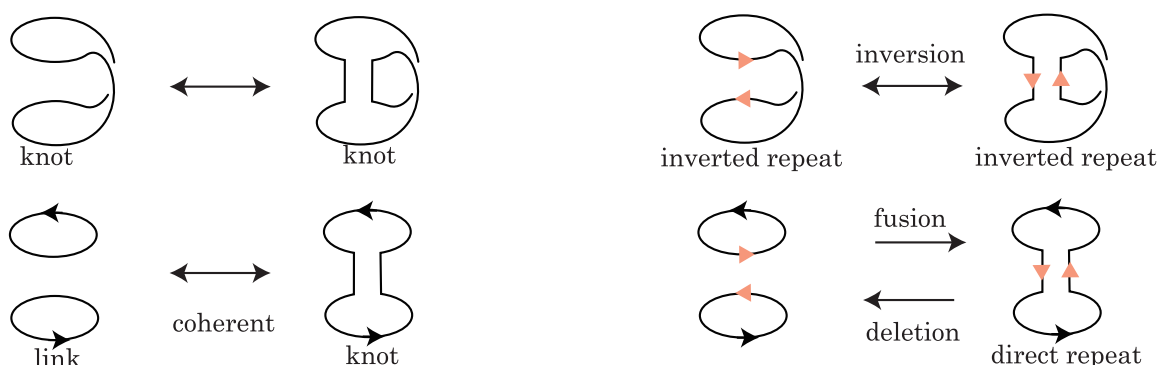


図 1: Band surgery（左図）と部位特異的組み換え（右図）が対応する．特に direct repeat recombination（右下図）は coherent band surgery（左下図）に対応する．

Coherent band surgery と図 2 の nullification move は本質的に同じである．

有向絡み目に対して，自明絡み目を得るのに何回の nullification moves が必要であるかを *nullification number* という．ここで自明絡み目の成分数はとわらない．この nullification number は [13, 3, 4] で研究されている．特に [3] で，9 交点以下の全ての結び目に対して nullification number が決定された．2 つの有向絡み目 L, L' に対して，何回の nullification moves が必要であるかを *nullification distance* とよび， $d(L, L')$ で表わすこととする．ここでの目標は 6 交点以下の結び目と 2 成分絡み目のそれぞれの組に対し，nullification distance（表 1,2,3）を与えることである．

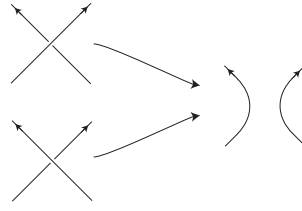


図 2: Nullification moves

2 Nullification pathway

有向絡み目の列 $L_0, L_1, \dots, L_n$ が $d(L_{i-1}, L_i) = 1$ ($i = 1, \dots, n$) をみたすとき (長さ n の) *nullification pathway* とよぶ. 一回の nullification move は必ず絡み目の成分数を 1 つ変える. よって, 次に注意したい. 絡み目 L の成分数を $\mu(L)$ で表わす

注意 2.1. $d(L, L') \equiv \mu(L) - \mu(L') \pmod{2}$.

そこで nullification pathway において成分数を考える. L_0, L_1, L_2, L_3 を長さ 3 の nullification pathway とすると簡単な議論から次がわかる.

補題 2.2. (1) L_0, L_1, L_2 の成分数がそれぞれ $m, m-1, m$ であるとき, $(m+1)$ 成分の絡み目 L'_1 が存在し, L_0, L'_1, L_2 も *nullification pathway* となる (図 3 の左) .

(2) L_0, L_1, L_2, L_3 の成分数がそれぞれ $(m-1), m, m+1, m$ であるとき, m 成分絡み目 L'_1 と $(m-1)$ 成分絡み目 L'_2 が存在し, L_0, L'_1, L'_2, L_3 も *nullification pathway* となる (図 3 の右) .

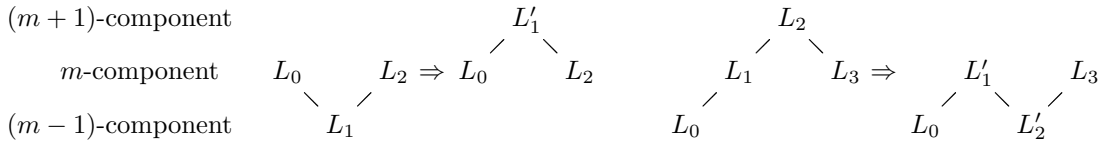


図 3: Nullification pathway と成分数

補題 2.2 から次がわかる.

命題 2.3. (1) 絡み目 L, L' をともに m 成分絡み目とする. もし, $d(L, L') \geq 4$ であるならば, m 成分絡み目 L'' が存在し $d(L, L') = d(L, L'') + d(L'', L')$, $2 \leq d(L, L'') \leq d(L, L') - 2$ が成り立つ.

(2) 絡み目 L, L' の成分数をそれぞれ m, m' とする. すると m 成分絡み目 L'' が存在し $d(L, L') = d(L, L'') + d(L'', L')$, $d(L'', L') = |m - m'|$ が成り立つ.

2 つの絡み目の間にどれだけの絡み目が存在するのかを考える. Baadar の議論 [1] を nullification move に関して同様に考えると次が得られる.

定理 2.4. 長さ 2 の *nullification pathway* L, L_0, L' に対し, $\nabla_{L_0} \neq 0$ とすると, L, L_i, L' が *nullification pathway* となる絡み目の無限族 $\{L_i\}$ が存在する. ただし, ∇ は *Conway polynomial* を表わす.

3 Nullification distance の下からの評価

この節では、知られている nullification distance の下からの評価について述べる。
 絡み目 L の signature を $\sigma(L)$ で表わす。村杉氏 [11] によって次が示されている。

定理 3.1 ([11]). $|\sigma(L) - \sigma(L')| \leq d(L, L')$.

絡み目 L の Jones polynomial を $V(L; t)$ で表わす。金信氏 [7] によって次が示されている。

定理 3.2 ([7]). $\omega = e^{i\pi/3}$ とし、 $d = d(L, L')$ とする。

$\mu(L) \equiv \mu(L') \pmod{2}$ のとき、

$$V(L; \omega)/V(L'; \omega) \in \{\pm(i\sqrt{3})^{\pm k}, \sqrt{3}^{\pm d} \mid k = 0, 1, \dots, d-1\}.$$

つまり、 $V(L; \omega)/V(L'; \omega) \notin \{\pm(i\sqrt{3})^{\pm k}, \sqrt{3}^{\pm n} \mid k = 0, 1, \dots, n-1\}$ ならば、 $d(L, L') \geq n+2$ が成り立つ。

$\mu(L) \not\equiv \mu(L') \pmod{2}$ のとき、

$$V(L; \omega)/V(L'; \omega) \in \{\pm i(i\sqrt{3})^{\pm k}, -\sqrt{3}^{\pm d} \mid k = 0, 1, \dots, d-1\}.$$

つまり、 $V(L; \omega)/V(L'; \omega) \notin \{\pm i(i\sqrt{3})^{\pm k}, -\sqrt{3}^{\pm n} \mid k = 0, 1, \dots, n-1\}$ ならば、 $d(L, L') \geq n+2$ が成り立つ。

$\rho(L) = Q(L; (\sqrt{5}-1)/2)$ とする。ただし、 $Q(L; z)$ は L の Q polynomial である。金信氏 [7] によって次が示されている。

定理 3.3 ([7]). $d = d(L, L')$ とする。すると次が成り立つ。

$$\rho(L)/\rho(L') \in \{\pm\sqrt{5}^{\pm k}, \sqrt{5}^{\pm d} \mid k = 0, 1, \dots, d-1\},$$

つまり、 $\rho(L)/\rho(L') \notin \{\pm\sqrt{5}^{\pm k}, \sqrt{5}^{\pm n} \mid k = 0, 1, \dots, n-1\}$ ならば、 $d(L, L') \geq n+1$ となる。

以下は nullification distance が 1 となる必要条件を与えており、第 5 節において下からの評価 3 として用いることができる。

一回の nullification move は成分数を 1 つだけ変えるので、一般の絡み目 L, L' に対して、 $d(L, L') \geq |\mu(L) - \mu(L')|$ が成り立つが、Arf invariant の性質から次がわかる。([12], [9, 系 8.3.2] 参照)

定理 3.4. 絡み目 L を *proper* (どの成分も他の残りの成分との絡み数が偶数になっている) とする。 $d(L, L') = \mu(L) - \mu(L')$ ならば、 L' も *proper* で $Arf(L) = Arf(L')$ が成り立つ。特に、 L, L' ともに *proper* としたとき、 $d(L, L') = 1$ ならば $Arf(L) = Arf(L')$ が成り立つ。

結び目 K の Alexander polynomial を $\Delta(K)$ で表わす。河内氏 [10] によって、次が示されている。

定理 3.5. *Anti-parallel* $(2, 2k)$ -torus link $T'_{2,2k}$ に対して、結び目 K が $d(K, T'_{2,2k}) = 1$ であるならば、

$$\Delta_K(t) \equiv \pm t^r f(t) f(t^{-1}) \pmod{k}$$

が成り立つ多項式 f が存在する。

その他に、Fox-Milnor [5] によって $d(K, 0_1^2) = 1$ となる結び目について、河内氏によって $d(K, T_{2,2k}) = 1$ となる結び目について ([6] を参照)、それぞれ Alexander polynomial に条件を与えている。ただし、 $T_{2,2k}$ は *parallel* $(2, 2k)$ -torus link である。また、[2] で $d(S(4mn-1, 2m), T'_{2,2k}) = 1$ であるための必要十分条件を与えている。ただし、 $S(4mn-1, 2m)$ は種数 1 の 2 橋結び目である。

4 2つの結び目の間の nullification distance

この節では2つの結び目 K, K' の間の nullification distance を考え、表1を与える。

まず、注意2.1より、 $d(K, K')$ は偶数であることがわかる。定義から明らかに $d(K, K') = 0$ であることと $K = K'$ であることは同値であり、 $d(K, K') = 2$ であることと $K \neq K'$ かつ K, L, K' が nullification pathway ($d(K, L) = d(L, K') = 1$) となる (2成分) 絡み目 L が存在することは同値である。そこで、これらをそれぞれ、“0”、“ $2(L)$ ”と表1に表わす。例えば、表1の 0_1 と 3_1 が交わる部分に “ $2(2_1^2)$ ” とあるが、これは、 $d(0_1, 2_1^2) = d(2_1^2, 3_1) = 1$ より $d(0_1, 3_1) = 2$ がわかることを意味する。 $d(K, K') = d \geq 4$ の場合、nullification distance の下からの評価 (定理3.1, 3.2, 3.3) を用いる。また、命題2.3 (1) より、 $d(K, K') = d(K, K'') + d(K'', K')$ かつ $2 \leq d(K, K'') \leq d(K, K') - 2$ となる結び目 K'' が存在する。そこで、これをそれぞれ “ $d(IK'')$ ”, “ $d(IIK'')$ ”, “ $d(IIIK'')$ ” と表1に表わす。例えば、表1の 0_1 と 5_1 が交わる部分に “ $4(I3_1)$ ” とあるが、これは、 $4 = |\sigma(0_1) - \sigma(5_1)| \leq d(0_1, 5_1) \leq d(0_1, 3_1) + d(3_1, 5_1) = 4$ より $d(0_1, 5_1) = 4$ がわかることを意味している。

表1: 2つの結び目の間の nullification distance

	3_1	4_1	5_1	5_2	6_1	6_2	6_3	$3_1 \# 3_1$	$3_1 \# 3_1!$
0_1	$2(2_1^2)$	$2(2_1^2)$	$4(I3_1)$	$2(2_1^2)$	$2(2_1^{2'})$	$2(2_1^2)$	$2(2_1^2)$	$4(I3_1)$	$2(3_1 \# 2_1^{2'})$
3_1	0	$2(2_1^2)$	$2(3_1 \# 2_1^2)$	$2(2_1^2)$	$2(6_1 \# 2_1^{2'})$	$2(2_1^2)$	$2(2_1^2)$	$2(3_1 \# 2_1^2)$	$2(3_1 \# 2_1^{2'})$
$3_1!$	$4(I0_1)$	$2(2_1^{2'})$	$6(I0_1)$	$4(I0_1)$	$2(2_1^{2'})$	$4(I0_1)$	$2(2_1^{2'})$	$6(I0_1)$	$2(3_1! \# 2_1^2)$
4_1		0	$4(I3_1)$	$2(2_1^2)$	$2(2_1^{2'})$	$2(2_1^2)$	$2(2_1^2)$	$4(I3_1)$	$4(II0_1)$
5_1			0	$2(3_1 \# 2_1^2)$	$4(I3_1)$	$2(4_1^2)$	$4(I3_1)$	$2(6_1^2)$	$4(I3_1)$
$5_1!$			$8(I0_1)$	$6(I0_1)$	$4(I3_1!)$	$6(I0_1)$	$4(I3_1!)$	$8(I0_1)$	$4(I3_1!)$
5_2				0	$2(4_1^{2'})$	$2(2_1^2)$	$2(2_1^2)$	$2(3_1 \# 2_1^2)$	$4(II0_1)$
$5_2!$				$4(I0_1)$	$2(2_1^{2'})$	$4(I0_1)$	$2(2_1^{2'})$	$6(I0_1)$	$4(II0_1)$
6_1					0	$2(4_1 \# 2_1^2)$	$2(2_1^{2'})$	$4(I3_1)$	$2(0_1^2)$
$6_1!$					$2(0_1^2)$	$2(2_1^2)$	$2(2_1^2)$	$4(I3_1)$	$2(0_1^2)$
6_2						0	$2(2_1^2)$	$4(II3_1)$	$2(3_1 \# 2_1^{2'})$
$6_2!$						$4(I0_1)$	$2(2_1^{2'})$	$6(I0_1)$	$2(3_1! \# 2_1^2)$
6_3							0	$4(I3_1)$	$2(3_1 \# 2_1^{2'})$
$3_1 \# 3_1$								0	$4(I3_1)$
$3_1! \# 3_1!$								$8(I0_1)$	$4(I3_1!)$

5 結び目と2成分絡み目の間の nullification distance

この節では結び目 K と2成分絡み目 L の間の nullification distance を考え、表2を与える。

まず、注意2.1より、 $d(K, K')$ は奇数であることがわかる。定義から明らかに $d(K, L) = 1$ であることと K と L の間に nullification move (もしくは coherent band surgery) があることは同値である。そこで、これを “1” と表2に表わす。例えば、表2の 0_1^2 と 0_1 が交わる部分に “1” とあるが、これは、 0_1^2 と 0_1 の間に nullification move があることを意味する。 $d(K, K') = d \geq 3$ の場合、nullification distance の下からの評価 (定理3.1, 3.2, 3.3, 3.4, 3.5) を用いる。また、命題2.3 (2) より、 $d(K, L) = d(K, K') + d(K', L)$ かつ $d(K', L) = 1$ となる結び目 K' が存在する。そこで、これをそれぞれ “ $d(IK')$ ”, “ $d(IIK')$ ”, “ $d(IIIK')$ ”, “ $d(IVK')$ ”, “ $d(VK')$ ” と表2に表わす。例えば、表2の 0_1^2 と 3_1 が交わる部分に “ $3(I0_1)$ ” とあるが、これは、 $3 = |\sigma(0_1^2) - \sigma(3_1)| \leq d(0_1^2, 3_1) \leq d(0_1^2, 0_1) + d(0_1, 3_1) = 3$ より $d(0_1^2, 3_1) = 3$ がわかることを意味している。

表 2: 結び目と 2 成分絡み目の間の nullification distance

	0_1	3_1	4_1	5_1	5_2	6_1	6_2	6_3	$3_1\#3_1$	$3_1\#3_1!$
0_1^2	1	$3(I0_1)$	$3(II0_1)$	$5(I0_1)$	$3(I0_1)$	1	$3(I0_1)$	$3(III0_1)$	$5(I0_1)$	1
2_1^2	1	1	1	$3(I3_1)$	1	$3(II0_1)$	1	1	$3(I3_1)$	$3(II0_1)$
$2_1^{2'}$	1	$3(I0_1)$	1	$5(I0_1)$	$3(I0_1)$	1	$3(I0_1)$	1	$5(I0_1)$	$3(II0_1)$
4_1^2	$3(I3_1)$	1	$3(I3_1)$	1	$3(IV3_1)$	$3(I3_1)$	1	$3(I3_1)$	$3(II3_1)$	$3(I3_1)$
$4_1^{2!}$	$3(I3_1!)$	$5(I3_1!)$	$3(I3_1!)$	$7(I3_1!)$	$5(I3_1!)$	$3(I3_1!)$	$5(I3_1!)$	$3(I3_1!)$	$7(I3_1!)$	$3(I3_1!)$
$4_1^{2'}$	1	$3(I0_1)$	$3(III0_1)$	$5(I0_1)$	$3(I0_1)$	$3(II0_1)$	$3(I0_1)$	$3(IV0_1)$	$5(I0_1)$	$3(II0_1)$
$4_1^{2'!}$	1	$3(II0_1)$	$3(III0_1)$	$3(I5_2)$	1	1	$3(IV0_1)$	$3(IV0_1)$	$3(I5_2)$	$3(II0_1)$
5_1^2	$3(IV3_1)$	1	1	$3(I3_1)$	$3(IV3_1)$	$3(II3_1)$	1	1	$3(I3_1)$	$3(II3_1)$
$5_1^{2!}$	$3(IV3_1)$	$3(I4_1)$	1	$5(I4_1)$	$3(I4_1)$	$3(IV4_1)$	$3(I4_1)$	1	$5(I4_1)$	$3(I3_1)$
$3_1\#2_1^2$	$3(I3_1)$	1	$3(I3_1)$	1	1	$3(I3_1)$	$3(II3_1)$	$3(I3_1)$	1	$3(I3_1)$
$3_1! \# 2_1^{2'}$	$3(I3_1!)$	$5(I3_1!)$	$3(I3_1!)$	$7(I3_1!)$	$5(I3_1!)$	$3(I3_1!)$	$5(I3_1!)$	$3(I3_1!)$	$7(I3_1!)$	$3(I3_1!)$
$3_1\#2_1^{2'}$	1	1	$3(II0_1)$	$3(I3_1)$	$3(II0_1)$	$1, 3(0_1)$	1	1	$3(I0_1)$	1
$3_1! \# 2_1^2$	1	$3(I0_1)$	$3(II0_1)$	$5(I0_1)$	$3(I0_1)$	$1, 3(0_1)$	$3(I0_1)$	1	$5(I0_1)$	1
6_1^2	$5(I5_1)$	$3(I5_1)$	$5(I5_1)$	1	$3(I5_1)$	$5(I5_1)$	$3(I5_1)$	$5(I5_1)$	1	$5(I5_1)$
$6_1^{2!}$	$5(I5_1!)$	$7(I5_1!)$	$5(I5_1!)$	$9(I5_1!)$	$7(I5_1!)$	$5(I5_1!)$	$7(I5_1!)$	$5(I5_1!)$	$9(I5_1!)$	$5(I5_1!)$
$6_1^{2'}$	1	$5(I0_1)$	$3(II0_1)$	$5(I0_1)$	$3(I0_1)$	$1, 3(0_1)$	$3(I0_1)$	$1, 3(0_1)$	$5(I0_1)$	$1, 3(0_1)$
$6_1^{2'!}$	1	1	$3(II0_1)$	$3(I0_1)$	$3(II0_1)$	$1, 3(0_1)$	$3(V0_1)$	$1, 3(0_1)$	$3(I3_1)$	$1, 3(0_1)$
6_2^2	$3(I3_1)$	1	$3(I3_1)$	$1, 3(3_1)$	1	$3(I3_1)$	$3(III3_1)$	$3(I3_1)$	$3(III3_1)$	$3(I3_1)$
$6_2^{2'}$	$3(I3_1!)$	$5(I3_1!)$	$3(I3_1!)$	$7(I3_1!)$	$5(I3_1!)$	$3(I3_1!)$	$5(I3_1!)$	$3(I3_1!)$	$7(I3_1!)$	$3(I3_1!)$
6_3^2	$3(I5_2)$	$3(IV5_2)$	$3(I5_2)$	$3(III5_2)$	1	$3(I5_2)$	$3(II5_2)$	$3(I5_2)$	1	$3, 5(I5_2)$
$6_3^{2!}$	$3(I5_2!)$	$5(I5_2!)$	$3(I5_2!)$	$7(I5_2!)$	$5(I5_2!)$	$3(I5_2!)$	$5(I5_2!)$	$3(I5_2!)$	$7(I5_2!)$	$3, 5(I5_2!)$
$6_3^{2'}$	$3(I3_1!)$	$3(I4_1)$	1	$5(I4_1)$	$3(I4_1)$	$3(IV3_1!)$	$3(I4_1)$	$3(II3_1!)$	$5(I4_1)$	$3(II3_1!)$
$6_3^{2'!}$	$3(II3_1)$	1	1	$3(I3_1)$	$3(IV3_1)$	$3(IV3_1)$	$3(I3_1)$	$3(II3_1)$	$3(I3_1)$	$3(II3_1)$
$4_1\#2_1^2$	1	$3(II0_1)$	1	$3(I6_2)$	$3(III0_1)$	1	1	$3(III0_1)$	$3(I7_6)$	$3(II6_2)$
$4_1\#2_1^{2'}$	1	$3(I0_1)$	1	$5(I0_1)$	$3(I0_1)$	$3(II0_1)$	$3(I0_1)$	$3(III0_1)$	$5(I0_1)$	$3(II6_2!)$

6 2つの2成分絡み目の間の nullification distance

この節では 2 つの 2 成分絡み目 L, L' の間の nullification distance を考え、表 3 を与える。

まず、注意 2.1 より、 $d(L, L')$ は偶数であることがわかる。定義から明らかに $d(L, L') = 0$ であることと $L = L'$ であることは同値であり、これを “0” と表 3 に表わす。 $d(L, L') = 2$ であるとき、(i) $d(L, K) = d(K, L') = 1$ となる結び目 K が存在する場合（これを “ $2(K)$ ” で表わす）と (ii) $d(L, L'') = d(L'', L') = 1$ となる 3 成分絡み目 L'' が存在する場合（これを “ $2(L'')$ ” で表わす）がある。補題 2.2 (1) より (i) が成り立てば (ii) も成り立つが、逆は一般に成り立たない。実際、表 3 の “*” は、(ii) は成り立つが定理 3.4 より (i) は成り立たないことがわかるものを示している。“†” は、(ii) は成り立つが (i) が成り立つかどうか分からないものを示している。

表 3: 2 つの 2 成分絡み目の間の nullification distance

	2_1^2	4_1^2	$4_1^{2'}$	5_1^2	$3_1\#2_1^2$	$3_1\#2_1^{2'}$
0_1^2	$2(0_1)$	$4(I2_1^2)$	$2(0_1)$	$2(0_1 \sqcup 2_1^2)^*$	$4(I2_1^2)$	$2(0_1)$
2_1^2	0	$2(3_1)$	$2(0_1)$	$2(3_1)$	$2(3_1)$	$2(0_1)$
$2_1^{2'}$	$2(0_1)$	$4(I2_1^2)$	$2(0_1)$	$2(4_1)$	$4(I2_1^2)$	$2(0_1)$
4_1^2		0	$4(I2_1^2)$	$2(3_1)$	$2(3_1)$	$2(3_1)$
$4_1^{2!}$		$6(I2_1^2)$	$2(2_1^{2'}\#2_1^{2'})^*$	$4(I2_1^{2'})$	$6(I2_1^2)$	$4(I2_1^{2'})$
$4_1^{2'}$			0	$4(IV2_1^2)$	$4(I2_1^2)$	$2(0_1)$
$4_1^{2'!}$			$2(0_1)$	$4(IV2_1^2)$	$2(5_2)$	$2(0_1)$
5_1^2				0	$2(3_1)$	$2(3_1)$
$5_1^{2!}$				$2(4_1)$	$4(I2_1^2)$	$2(6_3)$
$3_1\#2_1^2$					0	$2(3_1)$
$3_1! \# 2_1^{2'}$					$6(I2_1^2)$	$4(I2_1^{2'})$
$3_1! \# 2_1^2$						$2(0_1)$

TABLE 3. (つづき)

	6_1^2	$6_1^{2'}$	6_2^2	6_3^2	$6_3^{2'}$	$4_1\#2_1^2$
0_1^2	$6(I2_1^2)$	$2(0_1)$	$4(I2_1^2)$	$4(I2_1^2)$	$4(IV2_1^2)$	$2(0_1)$
2_1^2	$4(I4_1^2)$	$2(0_1)$	$2(3_1)$	$2(5_2)$	$2(4_1)$	$2(0_1)$
$2_1^{2'}$	$6(I2_1^2)$	$2(0_1)$	$4(I2_1^2)$	$4(I2_1^2)$	$2(4_1)$	$2(0_1)$
4_1^2	$2(5_1)$	$4(I2_1^2)$	$2(3_1)$	$2(2_1^2\#2_1^2)^*$	$4(I2_1^2)$	$2(7_6)$
$4_1^{2!}$	$8(I2_1^2)$	$2(3_1!)$	$6(I2_1^2)$	$6(I2_1^2)$	$2(3_1!)$	$4(I2_1^2)$
$4_1^{2'}$	$6(I2_1^2)$	$2(0_1)$	$4(I2_1^2)$	$4(I2_1^2)$	$2(4_1^{2'}\#2_1^2)^*$	$2(0_1)$
$4_1^{2'!}$	$4(I4_1^2)$	$2(0_1)$	$2(5_2)$	$2(5_2)$	$4(IV2_1^2)$	$2(0_1)$
5_1^2	$6(I2_1^2)$	$2, 4(2_1^2)$	$2(3_1!)$	$4(IV2_1^2)$	$2(4_1)$	$2(4_1)$
$5_1^{2!}$	$6(I2_1^2)$	$2(3_1!)$	$4(I2_1^2)$	$4(I2_1^2)$	$2(4_1)$	$2(4_1)$
$3_1\#2_1^2$	$2(5_1)$	$4(I2_1^2)$	$2(3_1)$	$2(5_2)$	$4(I2_1^2)$	$2(7_6)$
$3_1! \# 2_1^{2'}$	$8(I2_1^2)$	$2(3_1!)$	$6(I2_1^2)$	$6(I2_1^2)$	$2(3_1!)$	$4(I2_1^{2'})$
$3_1\#2_1^{2'}$	$4(I4_1^2)$	$2(0_1)$	$2(3_1)$	$2, 4(2_1^2)$	$2, 4(2_1^2)$	$2(0_1)$
$3_1! \# 2_1^2$	$6(I2_1^2)$	$2(0_1)$	$4(I2_1^2)$	$4(I2_1^2)$	$2(3_1!)$	$2(0_1)$
6_1^2	0	$6(I2_1^2)$	$2(4_1^2\#2_1^2)^\dagger$	$2(3_1\#3_1)$	$6(I2_1^2)$	$4(I4_1^2)$
$6_1^{2!}$	$10(I2_1^2)$	$4(I4_1^{2!})$	$8(I2_1^2)$	$8(I2_1^2)$	$4(I4_1^{2!})$	$6(I2_1^{2'})$
$6_1^{2'}$		0	$4(I2_1^2)$	$4(I2_1^2)$	$2(3_1!)$	$2(0_1)$
$6_1^{2'!}$		$2(3_1)$	$2(3_1)$	$2, 4(2_1^2)$	$2, 4(2_1^2)$	$2(0_1)$
6_2^2			0	$2(5_2)$	$4(I2_1^2)$	$2, 4(2_1^2)$
$6_2^{2'}$			$6(I2_1^2)$	$6(I2_1^2)$	$2(3_1!)$	$4(I2_1^{2'})$
6_3^2				0	$4(I2_1^2)$	$2, 4(2_1^2)$
$6_3^{2!}$				$6(I2_1^2)$	$2(2_1^{2'}\#2_1^{2'})^\dagger$	$4(I2_1^{2'})$
$6_3^{2'}$					0	$2(4_1)$
$6_3^{2'!}$					$2(4_1)$	$2(4_1)$
$4_1\#2_1^{2'}$						$2(0_1)$

簡単な議論から次の (ii) は成り立つが (i) は成り立たないための必要条件を得る.

定理 6.1. $d(L, L'') = d(L'', L') = 1$ となる 3 成分絡み目 L'' が存在するが, 任意の結び目 K に対し $d(L, K) + d(K, L') > 2$ ならば,

$$lk(L) = lk(L').$$

定理 3.4 と定理 6.1 から次が得られる.

系 6.2. L, L' が *proper* (絡み数が偶数) とする. もし, $Arf(L) \neq Arf(L')$ かつ $lk(L) \neq lk(L')$ ならば, $d(L, L') \geq 4$.

$d(L, L') = d \geq 4$ の場合, nullification distance の下からの評価 (定理 3.1, 3.2, 3.3, 系 6.2) を用いる. また, 命題 2.3 (1) より, $d(L, L') = d(L, L'') + d(L'', L')$ かつ $2 \leq d(L, L'') \leq d(L, L') - 2$ となる 2 成分絡み目 L'' が存在する. そこで, これをそれぞれ “ $d(IL'')$ ”, “ $d(II L'')$ ”, “ $d(III L'')$ ”, “ $d(IV L'')$ ” と表 3 に表わす.

参考文献

- [1] S. Baader, Note on crossing changes, Q. J. Math. **57** (2006), No. 2, 139–142.
- [2] I. Darcy, K. Ishihara, R. Medikonduri and K. Shimokawa, Rational tangle surgery and Xer recombination on catenanes, preprint, arXiv:1108.0724.
- [3] C. Ernst, A. Montemayor and A. Stasiak, Nullification of Small Knots, Progr. Theoret. Phys. Suppl. No. 191 (2011), 66–77
- [4] Y. Diao, C. Ernst and A. Montemayor, Nullification of knots and links, preprint, arXiv:1101.1328
- [5] R. H. Fox and J. W. Milnor, Singularities of 2-spheres in 4-space and cobordism of knots, Osaka J. Math. **3** (1966) 257–267.
- [6] K. Ishihara and K. Shimokawa, Band surgeries between knots and links with small crossing numbers, Progr. Theoret. Phys. Suppl. No. 191 (2011) 245–255.
- [7] T. Kanenobu, Band surgery on knots and links, J. Knot Theory Ramifications **19** (2010), No. 12, 1535–1547.
- [8] T. Kanenobu, Band surgery on knots and links II, preprint.
- [9] A. Kawauchi, Lectures on knot theory, (Japanese) Kyoritsu Shuppan Co. Ltd, 2007.
- [10] A. Kawauchi, On links by zero-linking twists, preprint.
- [11] K. Murasugi, On a certain numerical invariant of link types, Trans. Amer. Math. Soc. **117** (1965), 387–422.
- [12] R. A. Robertello, An invariant of knot cobordism, Comm. Pure Appl. Math. **18** (1965), 543–555.
- [13] D. Sola, Nullification number and flyping conjecture, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova **86** (1991), 1–16.