The Gordian complex of non-classical virtual knots by crossing changes

鈴木まり絵 (東京女子大学)、下澤 昌史

概 要

virtual knot の crossing change による Gordian complex を考え, 任意の virtual knot を頂点とする無限に高い次元の単体が存在することを示す．ここで, 任意に与えた頂点の knot 以外は classical knot でない virtual knot とすることが出来る.

1 Introduction

次の図 1.1 のように, real crossing だけでなく，virtual crossing ももつ oriented link diagram を ***virtual link diagram*** という.

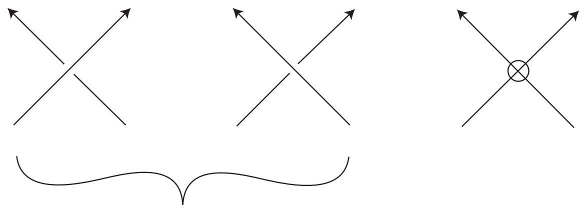

図 1.1; real crossing と virtual crossing

図 1.2 で示す変形は，(AI〜AIII) を ***classical Reidemeister move***, (BI〜BIII，C) を ***virtual Reidemeister move*** といい，それらをまとめて ***generalized Reidemeister move*** という．２つの virtual link diagram が有限回の generalized Reidemeister move を施して移り合うとき，それらは同値であると定義する ([2])．generalized Reidemeister move が生成する同値関係による virtual link diagram の同値類を ***virtual link*** という.

classical knot K から K' へ変形するのに必要な crossing change の最小回数を Gordian distance といい, $d_G(K, K')$ で表わす.

Hirasawa-Uchida は以下の結果を示した.

Definition 1.1 [1]**.** classical knot の Gordian complex $\mathcal{G}$ とは, 以下において定義される単体的複体のことである.
(i) $\mathcal{G}$ の頂点集合は, $\mathbb{S}^3$ 内のすべての oriented classical knot type である,
(ii) $\mathcal{G}$ の $n+1$ 個の頂点 $\{K_0, K_1, \ldots, K_n\}$ は $d_G(K_i, K_j) = 1$ $(i \neq j,\ i,\ j = 0, 1, \ldots, n)$ を満

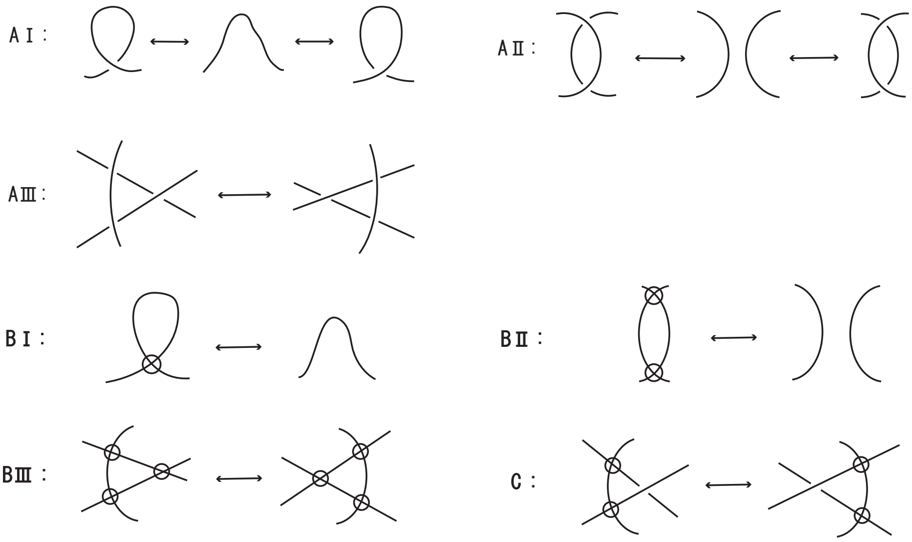

図 1.2; generalized Reidemeister move

たすとき, n 単体を張る, と定義する.

Theorem 1.2 [1]**.** Gordian complex の任意の 1 単体 e に対して, e を部分複体としてもつ無限に高い次元の単体 σ が存在する.

Corollary 1.3 [1]**.** 任意の classical knot K_0 に対して, Gordian distance $d_G(K_i, K_j) = 1$ $(i \neq j)$ を満たすような無限個の classical knot $K_0, K_1, K_2, \ldots$ が存在する.

図 1.3 の move は virtual knot diagram において real crossing を virtual crossing に変える local move であり, v-move と呼ばれる. v-move は virtual knot diagram において unknotting operation である. [4] において v-move を用いた virtual knot の Gordian complex が定義されている.

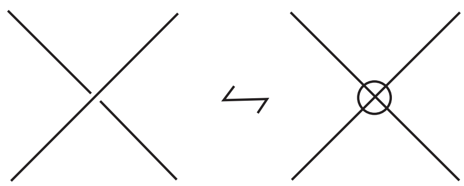
図 1.3; v-move

本稿では virtual knot に対する crossing change による Gordian complex を考える.

virtual knot K, K' が互いに crossing change で移るとき, K から K' を得るのに必要な crossing change の最小回数を, $d_G(K, K')$ で表わす.

Definition 1.4. virtual knot の crossing chenge による Gordian complex $\mathcal{G}$ とは, 以下において定義される単体的複体のことである.
(i) $\mathcal{G}$ の頂点集合は, virtual knot
(ii) $\mathcal{G}$ の $n+1$ 個の頂点 $\{K_0, K_1, \ldots, K_n\}$ は $d_G(K_i, K_j) = 1$ $(i \neq j,\ i,\ j = 0, 1, \ldots, n)$ を満たすとき, n-単体を張る, と定義する.

crossing change で移り合う virtual knot を同値と考えたとき, virtual knot における同値類が無限個存在する ([5]).

このとき, 次の結果が得られた.

Theorem 1.5. virtual knot の crossing change による Gordian complex の任意の 0 単体 p に対して, p を部分複体にもつ無限に高い次元の単体が存在する. ここで, p 以外の 0 単体は non-classical virtual knot で構成できる.

Corollary 1.6. 任意の virtual knot K_0 に対して, Gordian distance $d_G(K_i, K_j) = 1(i \neq j,$ $i, j = 1, 2, ...)$ を満たすような無限個の non-classical virtual knot $K_1, K_2, K_3, ...$ が存在する.

2 f-polynomial and $J(K)$

L を virtual link とし, D を L の virtual link diagram とする. Kauffman[2] は virtual link L の不変量である f-polynomial $f_L(A)$ を定義した. D の各々の real crossing を, 向きを忘れて図のように 2 種類の方法で splice する.

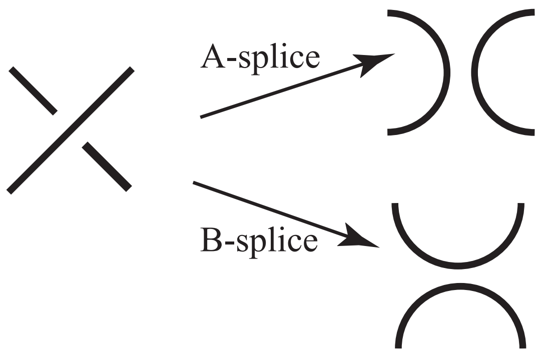

図 2.1; A-splice と B-splice

D の state とは, D の各々の real crossing に A-splice か B-splice を施すことによって, D から得られる virtual link diagram のことをいう. D の Kauffman bracket polynomial $< D >$

は, 次の式で定義される.

$$< D >= \sum_S A^{a(S)-b(S)}(-A^2 - A^{-2})^{\mu(S)-1}.$$

S は D のすべての state を考える. それぞれの state において, $a(S)$ は A-splice の個数, $b(S)$ は B-splice の個数, $\mu(S)$ は state S の loop の数を表わす. oriented virtual link diagram D において, D の positive crossing の個数から negative crossing の個数を引いたものを writhe といい, $w(D)$ で表わす. D の f-polynomial は, 次の式で定義される.

$$f_D(A) = (-A^3)^{-w(D)} < D > .$$

$f_D(A)$ は oriented virtual link L の不変量であるので, 以下 L の f-polynomial を $f_L(A)$ と表わす.

タングル T の $N(T)$、$D(T)$、$X(T)$、タングル T と S の和 $T+S$ を図 2.2 のように定義する. $N(T)$、$D(T)$ は classical knot では、T の numerator、denominator と呼ばれる.

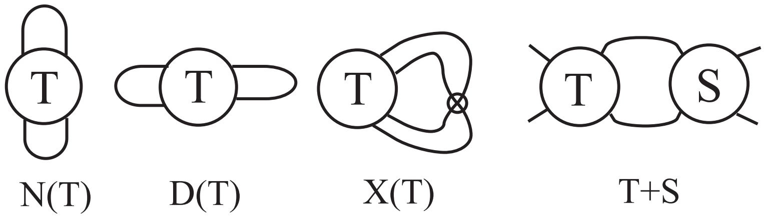

図 2.2; $N(T)$, $D(T)$, $X(T)$, $T+S$

$N(T+S)$ の bracket polynomial について次の式が成立する.

Lemma 2.1 [4].

$$< N(T+S) >= (< D(T) >, < N(T) >, < X(T) >)\mathcal{A}\begin{pmatrix} < D(S) > \\ < N(S) > \\ < X(S) > \end{pmatrix}.$$

ここで,

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \beta \\ \beta & \alpha & \beta \\ \beta & \beta & \alpha \end{pmatrix},$$

$$\alpha = \frac{\mu+1}{(\mu-1)(\mu+2)}\ , \beta = \frac{-1}{(\mu-1)(\mu+2)}, \quad \mu = -A^2 - A^{-2}.$$

Kauffman は以下の virtual knot の不変量 $J(K)$ を導入した.

Definition 2.2 [3]. K を oriented virtual link とし, D を K の oriented virtual link diagram とする. $C(D)$ を D の real crossing 全体の集合とする. $Odd(D)$ を次の条件を満たす real crossing の集合とし, $Odd(D)$ の各要素を odd crossing と呼ぶ.

$Odd(D)$:=$\{i\in\ C(D)|i$ からスタートして i に戻るまで通過した real crossing の数が奇数 $\}$

$J(D)$ は odd crossing の符号の和として定義される.

$$J(D)=\sum_{i\ \in\ Odd(D)} sign(i).$$

Theorem 2.3 [3]. $J(D)$ の値は, generalized Reidemeister move の下で不変である. 即ち, $J(D)$ は virtual knot の不変量である.

以下, $J(D)$ を $J(K)$ と表わすことにする.

3 Proof of Theorem 1.5

Theorem 1.5 の証明には以下の図を用いる. K_0 を p に対応する knot と考え, K_0 と $K_1,\ldots,K_n$ を connected sum した knot を考える. crossing 1 で crossing change すると trivial knot になり, crossing i で crossing change すると K_{i-1} $(i=2,3,...,n)$ になることより, Theorem 1.5 の条件を満たしていることが分かる. virtual knot $K_0,K_1,\ldots,K_n$ がすべて異なるということを f-polynomial を用いて示し, classical knot でない virtual knot で構成されていることを $J(K)$ を用いて示す.

K_n :

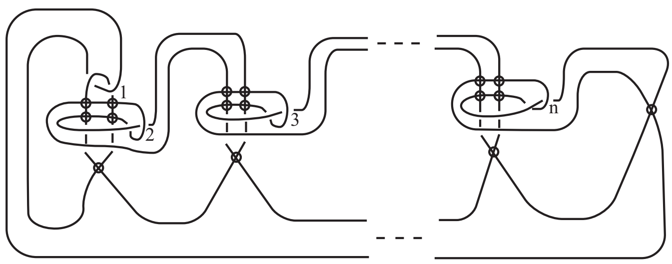

図 3.1

K_n の f-polynomial の最低次数は, Lemma 2.1 を用いて計算すると, $-12n+6$ となるので, knot type は全て異なる. $J(K_n)$ の値は -2 となるので, classical knot でない virtual knot である.

また, 与えられた knot K_0 が $J(K)$ の値 2 をもつとき, connected sum した knot が, classical knot の可能性が出てくるので, 下図のような knot K'_n を考え, 上と同様に K_0 と connected sum する.

K'_n :

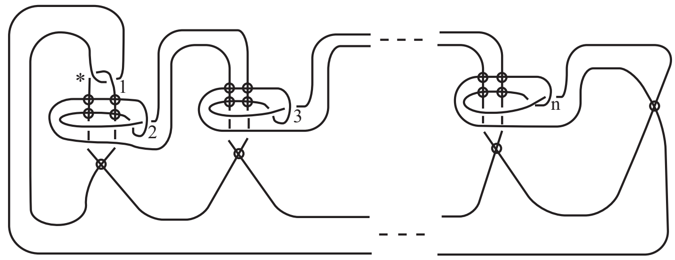

図 3.7

この knot は K_n とは crossing * と crossing 1 で crossing が逆になっている. K_n と同様に考え, crossing 1 で crossing change すると trivial knot であり、crossing i で crossing change すると K'_{i-1} $(i = 2, 3, ..., n)$ になるので, Theorem 1.5 の条件を満たす. K'_n の f-polynomial の最低次数は Lemma 2.1 を用いて計算すると, $-12n - 10$ であり, knot type が全て異なる. また, $J(K'_n)$ の値は 2 なので, classical knot でない virtual knot で構成されている.

参考文献

[1] M. Hirasawa and Y. Uchida, The Gordian complex of knots, Knot Theory Ramifications 11 (3) (2002), 363-368.

[2] L. H. Kauffman, Virtual knot theory, European. J. Combin. 20 (7) (1999), 663-691.

[3] Louis H. Kauffman , A self-linking invariant of virtual knots, Fund. Math. 184(2004), 135-158.

[4] S. Horiuchi,K. Komura,Y. Ohyama and M. Shimozawa , The Gordian complex of virtual knots, preprint.

[5] E. Byberi and V. Chernov, Virtual bridge number one knots, Communm.Contemp Math. 10(2008), suppl. 1, 1013-1021.