

ON THE ENHANCEMENTS TO THE MILNOR NUMBERS OF A CLASS OF MIXED POLYNOMIALS

稲葉和正 (KAZUMASA INABA)

1. 導入

J. Milnor は複素多項式から現在 Milnor 束と呼ばれる S^1 上のファイバー束を構成し, 複素特異点の研究に応用した. 近年岡睦雄氏によって mixed 多項式と呼ばれる複素変数 z とその共役 $\bar{z}$ からなる多項式に対しても, ある条件のもとでファイバー束が存在することが示された. このファイバー束は多項式が複素共役を含まないときは Milnor 束に一致する. また特異点が孤立しているとき, mixed 多項式は球面内の絡み目を定める. 本稿では mixed 多項式の特異点から定まるファイバー絡み目に対して, Milnor 数の enhancement と呼ばれる位相不変量を考察し, 得られた結果を紹介する.

第 2 章で Milnor 束の説明をし, 第 3 章で mixed 多項式とその性質を紹介する. 第 4 章で Milnor 数の enhancement と主定理を紹介し, 第 5 章で補足を述べる.

2. MILNOR 束

$f(z)$ は $\mathbb{C}^n$ の原点 $\mathbf{o} = (0, \dots, 0)$ で消える n 変数 $z = (z_1, \dots, z_n)$ の複素多項式とする. $\mathbf{o}$ は $f(z)$ の特異点, つまり $(\partial f / \partial z_1)(\mathbf{o}) = \dots = (\partial f / \partial z_n)(\mathbf{o}) = 0$ をみたす点とする. 1968 年に Milnor は次のことを証明した.

定理 1. [2] 十分小さい正の数 ε_0 が存在して, $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ をみたす任意の正の数 ε に対し,

$$\frac{f}{|f|} : S_\varepsilon^{2n-1} \setminus K_f \rightarrow S^1$$

は局所自明なファイバー束になる. ここで S_ε^{2n-1} は $(2n-1)$ 次元の原点を中心にもつ半径 ε の球面とし, $K_f = S_\varepsilon^{2n-1} \cap f^{-1}(0)$ とおく.

このファイバー束を Milnor 束と呼ぶ. 原点が $f(z)$ の孤立特異点になるとき, このファイバー束の各ファイバーは $(n-1)$ 次元球面 S^{n-1} のブーケ $S^{n-1} \vee \dots \vee S^{n-1}$ と同じホモトピー型をもつ. ブーケとは S^{n-1} の μ 個のコピー $S_1^{n-1}, \dots, S_\mu^{n-1}$ を用意し, そこから 1 点 $x_j \in S_j^{n-1}$ を選ぶ. そして, 球面のコピーの非交和 $S_1^{n-1} \cup \dots \cup S_\mu^{n-1}$ において $x_1, \dots, x_\mu$ を 1 点に同一視して得られる位相空間のことをいう. この位相空間は点 x_j の選び方に依存しない. よってファイバー F のホモロジー群は

$$H_k(F; \mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z} & k = n-1 \\ \mathbb{Z} & k = 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

となる. またファイバー F の閉包は内部が F で境界が K_f になる滑らかな多様体である. このとき K_f はホモトピー群 $\pi_j(K_f)$ ($0 \leq j \leq n-3$) が全て自明になる滑らかな多様体である. このような多様体を $(n-3)$ -連結であるという. K_f を特異点の絡み目と呼ぶ. 複素超曲面の特異点の絡み目は, 後で説明する単純なファイバー絡み目の重要な例になっている.

例えば $n=2$ のとき, $f(\mathbf{z}) = z_1^p + z_2^q$ としたときの K_f は (p, q) -トーラスリンクになる. 一般には複素多項式の孤立特異点から定まる絡み目はトーラスリンクのケーブルリンクで, ケーブルの係数たちはある不等式をみたしているものになる [1].

3. MIXED 多項式

$f(\mathbf{z}, \bar{\mathbf{z}})$ を $\mathbf{z} = (z_1, \dots, z_n)$ と $\bar{\mathbf{z}} = (\bar{z}_1, \dots, \bar{z}_n)$ を変数にもつ次の形で表される多項式とする:

$$f(\mathbf{z}, \bar{\mathbf{z}}) := \sum_{\nu, \mu} c_{\nu, \mu} \mathbf{z}^\nu \bar{\mathbf{z}}^\mu.$$

ここで $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_n)$ に対して $\mathbf{z}^\nu = z_1^{\nu_1} \cdots z_n^{\nu_n}$ とおく (また $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_n)$ に対しては $\bar{\mathbf{z}}^\mu = \bar{z}_1^{\mu_1} \cdots \bar{z}_n^{\mu_n}$ とおく). $\bar{z}_j$ で z_j の複素共役を表す. このような実多項式 $f(\mathbf{z}, \bar{\mathbf{z}})$ を mixed 多項式と呼ぶ.

各 z_j に対して $z_j = x_j + iy_j$ とおき, $f(\mathbf{z}, \bar{\mathbf{z}})$ を実部と虚部に分けて $\Re f(\mathbf{z}, \bar{\mathbf{z}}) + i\Im f(\mathbf{z}, \bar{\mathbf{z}})$ と表すと $f(\mathbf{z}, \bar{\mathbf{z}})$ は 2 つの実 $2n$ 変数 $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n), \mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)$ の多項式で表される. 逆に $g(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ と $h(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ を実 $2n$ 変数多項式とし,

$$f(\mathbf{z}, \bar{\mathbf{z}}) := g\left(\frac{\mathbf{z} + \bar{\mathbf{z}}}{2}, \frac{\mathbf{z} - \bar{\mathbf{z}}}{2i}\right) + ih\left(\frac{\mathbf{z} + \bar{\mathbf{z}}}{2}, \frac{\mathbf{z} - \bar{\mathbf{z}}}{2i}\right),$$

とおくと, $g(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ と $h(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ から mixed 多項式が定まり, 超曲面 $V = \{\mathbf{z} \in \mathbb{C}^n | f(\mathbf{z}, \bar{\mathbf{z}}) = 0\}$ は $W = \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbb{R}^{2n} | g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = h(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0\}$ に一致する. よって mixed 多項式の研究は実多項式写像 $\mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^2$ の研究に他ならない. 実多項式写像を mixed 多項式と見ることの利点として, 複素超曲面特異点の研究の手法を用いることができることが挙げられる.

Mixed 多項式による写像 $f: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$ の臨界点を mixed 特異点と呼ぶ. mixed 特異点はその点の近傍で他に特異点を含まないとき孤立しているという. $f(\mathbf{z}, \bar{\mathbf{z}})$ は $\mathbb{C}^n$ の原点 $\mathbf{o}$ で $f(\mathbf{o}) = 0$ が成り立つと仮定する. このとき, $K_f := S_{\varepsilon}^{2n-1} \cap f^{-1}(0)$ を $f(\mathbf{z}, \bar{\mathbf{z}})$ の絡み目と呼ぶ. 原点 $\mathbf{o}$ が $f(\mathbf{z}, \bar{\mathbf{z}})$ の孤立特異点のとき, K_f は $(2n-1)$ 次元の滑らかな多様体になることが [2, Corollary 2.9] からわかる.

Milnor 束の存在等の複素多項式で得られた結果が, mixed 多項式に対しても成り立つのかは重要な問題である. 一般には mixed 多項式で, その特異点が孤立している例を見つけることは難しい. ここで岡睦雄氏により導入されたファイバー束をもつ mixed 多項式のクラスと, 特異点が孤立している mixed 多項式のクラスを紹介する [6, 7]. まずは, $f(\mathbf{z}, \bar{\mathbf{z}})$ のニュートン図形 $\Gamma_+(f; \mathbf{z}, \bar{\mathbf{z}})$ を

$$\bigcup_{(\nu, \mu)} \{(\nu + \mu) + \mathbb{R}_+^n \mid c_{\nu, \mu} \neq 0\}$$

の凸包として定義する. ここで $\nu + \mu$ は $\mathbf{z}^\nu \bar{\mathbf{z}}^\mu$ の指数の和, $\mathbb{R}_+^n$ は $\mathbb{R}^n$ の部分集合で各成分が 0 以上になるものとする. このとき $\Gamma_+(f; \mathbf{z}, \bar{\mathbf{z}})$ のコンパクトな面の集まりをニュートン境界といい, $\Gamma(f; \mathbf{z}, \bar{\mathbf{z}})$ で表す.

次に、ニュートン境界を用いて mixed 多項式の非退化性を定義する。 $P = (p_1, \dots, p_n)$ を各成分が正の整数のベクトルとし、線形関数 $\ell_P : \Gamma(f; \mathbf{z}, \bar{\mathbf{z}}) \rightarrow \mathbb{R}$ を $\ell_P(v) = \sum_{j=1}^n p_j v_j$ で定義する。 $\Delta(P)$ で ℓ_P の値が最小になる $\Gamma(f; \mathbf{z}, \bar{\mathbf{z}})$ の面とする。 各ベクトル P に対して面関数 $f_P(\mathbf{z}, \bar{\mathbf{z}})$ を

$$f_P(\mathbf{z}, \bar{\mathbf{z}}) := \sum_{(\nu+\mu) \in \Delta_k} c_{\nu, \mu} \mathbf{z}^\nu \bar{\mathbf{z}}^\mu$$

で定義する。 $f_P(\mathbf{z}, \bar{\mathbf{z}}) : \mathbb{C}^{*n} \rightarrow \mathbb{C}$ が臨界点をもたないとき、 $f(\mathbf{z}, \bar{\mathbf{z}})$ はベクトル P で強非退化 (strongly non-degenerate) であるという。 ここで $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ である。 ただし、 $\dim \Delta(P) \geq 1$ のときは $f_P(\mathbf{z}, \bar{\mathbf{z}})$ は全射であることも仮定する。 全ての各成分が正の整数のベクトルで $f(\mathbf{z}, \bar{\mathbf{z}})$ が強非退化になるとき、 $f(\mathbf{z}, \bar{\mathbf{z}})$ は強非退化であるという。

ファイバー束の存在を示すためには次の条件も必要である。 集合 $\{1, \dots, n\}$ の部分集合 J で $|J| = n - k$ をみたすものを任意にとる。 $\mathbb{C}^J = \{\mathbf{z} = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n \mid z_j = 0, j \notin J\}$ とおく。 $f(\mathbf{z}, \bar{\mathbf{z}})$ の $\mathbb{C}^J$ 上への制限 $f|_{\mathbb{C}^J}$ が $f|_{\mathbb{C}^J} \not\equiv 0$ をみたすとき、 $f(\mathbf{z}, \bar{\mathbf{z}})$ は k -convenient であるという。 特に $(n-1)$ -convenient のときは $f(\mathbf{z}, \bar{\mathbf{z}})$ は単に convenient であるという。

mixed 多項式 $f(\mathbf{z}, \bar{\mathbf{z}})$ がこれらの条件をみたすとき、岡睦雄氏は次のファイバー束が存在することを示した。

定理 2. [7]. $f(\mathbf{z}, \bar{\mathbf{z}}) : (\mathbb{C}^n, \mathbf{o}) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ を強非退化かつ convenient mixed 多項式とする。 このとき十分小さい正の定数 ε_0 が存在し、 $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ をみたす任意の正の数 ε に対し、

$$\frac{f(\mathbf{z}, \bar{\mathbf{z}})}{|f(\mathbf{z}, \bar{\mathbf{z}})|} : S_\varepsilon^{2n-1} \setminus K_f \rightarrow S^1$$

は局所自明なファイバー束になる。

このファイバー束は多項式が複素共役 $\bar{\mathbf{z}}$ を含まないとき、Milnor 束に一致する。

原点 $\mathbf{o}$ がいつ $f(\mathbf{z}, \bar{\mathbf{z}})$ の孤立特異点になるのかを示すためには次の条件が必要である。 $\dim \Delta(P) \geq 1$ となる P に対して、 $f_P^{-1}(0) \cap \mathbb{C}^{*n}$ が空集合にならないとき、 $f(\mathbf{z}, \bar{\mathbf{z}})$ は真に非退化 (true non-degenerate) であるという。 $f(\mathbf{z}, \bar{\mathbf{z}})$ が convenient かつ真に非退化になるとき、 $f(\mathbf{z}, \bar{\mathbf{z}})$ は孤立特異点をもち、 K_f は滑らかな多様体になる [7]。 例えば $f(\mathbf{z}, \bar{\mathbf{z}}) = (z_1 + z_2)\overline{(z_1 - z_2)}$ とおくと $f(\mathbf{z}, \bar{\mathbf{z}})$ は強非退化になり、絡み目 K_f は負のホップ・リンクになる。

次に S^1 作用を許容する mixed 多項式のクラスを紹介する。 $p_1, \dots, p_n$ は互いに素な整数とする。 $\mathbb{C}^n$ 上の S^1 作用を次のように定義する：

$$s \circ \mathbf{z} = (s^{p_1} z_1, \dots, s^{p_n} z_n), \quad s \in S^1.$$

ある正の整数 d_p が存在し、mixed 多項式 $f(\mathbf{z}, \bar{\mathbf{z}})$ が

$$(1) \quad f(s^{p_1} z_1, \dots, s^{p_n} z_n, \bar{s}^{p_1} \bar{z}_1, \dots, \bar{s}^{p_n} \bar{z}_n) = s^{d_p} f(\mathbf{z}, \bar{\mathbf{z}}), \quad s \in S^1,$$

をみたすとき、 $f(\mathbf{z}, \bar{\mathbf{z}})$ は polar weighted homogeneous という。 このとき $f/|f| : S_\varepsilon^{2n-1} \setminus K_f \rightarrow S^1$ は局所自明なファイバー束となり、ファイバー束のモノドロミーは

$$(z_1, \dots, z_n) \mapsto \left(\exp\left(\frac{2p_1 \pi i}{d_p}\right) z_1, \dots, \exp\left(\frac{2p_n \pi i}{d_p}\right) z_n \right),$$

3

で与えられる [6, 7]. また $\mathbb{C}^n$ 上の $\mathbb{R}^*$ 作用を次のように定義する

$$t \circ \mathbf{z} = (t^{q_1} z_1, \dots, t^{q_n} z_n), \quad t \in \mathbb{R}^*.$$

ここで $q_1, \dots, q_n$ は 0 以上の整数である. このとき, ある正の整数 d_r が存在して

$$(2) \quad f(t^{q_1} z_1, \dots, t^{q_n} z_n, t^{q_1} \bar{z}_1, \dots, t^{q_n} \bar{z}_n) = t^{d_r} f(\mathbf{z}, \bar{\mathbf{z}}), \quad t \in \mathbb{R}^*,$$

が成り立つとき, $f(\mathbf{z}, \bar{\mathbf{z}})$ は radial weighted homogeneous であるという. $f(\mathbf{z}, \bar{\mathbf{z}})$ が等式 (1), (2) をみたすときは, 大域的なファイバー束

$$\mathbb{C}^n \setminus f^{-1}(0) \rightarrow \mathbb{C}^*$$

も存在する.

4. MILNOR 数の ENHANCEMENT

(S^{2n-1}, K) を絡み目, つまり K は $(2n-1)$ 次元球面 S^{2n-1} 内の余次元 2 の向き付けられた閉多様体とする. $N(K)$ で K の S^{2n-1} 内のチューブ近傍とし, $E(K) = S^{2n-1} \setminus \text{Int}(N(K))$ とおく. $N(K)$ が 2 次元円板上のファイバー束

$$\phi_0 : N(K) \rightarrow D^2$$

と $E(K)$ が S^1 上のファイバー束

$$\phi_1 : E(K) \rightarrow S^1$$

をもち, さらに $\phi_0|_{\partial N(K)} = \phi_1|_{\partial N(K)}$ をみたすとき, K をファイバー絡み目という. このファイバー束は S^{2n-1} のオープンブック分解とも呼ばれている. ファイバー絡み目 K が $(n-3)$ -連結かつファイバー曲面が $(n-2)$ -連結のとき K は単純であるという. 複素多項式から定まるファイバー絡み目は単純であることが知られている [2]. ただし, mixed 多項式のときはファイバー絡み目が常に単純になるのかはわかっていない. 単純なファイバー絡み目 (S^{2n-1}, K) のファイバーの $(n-1)$ 次ホモロジー群のランクを Milnor 数と呼び $\mu(K)$ で表す.

W. Neumann と L. Rudolph はファイバー絡み目の研究のために接束 $TS^{2n-1} \oplus \mathbb{R}$ 内の向き付けられた $(2n-2)$ 次元平面場で $E(K)$ 上では K のファイバー束の各ファイバーに横断的に交わっていて, K 上では $K \oplus \mathbb{R}$ に接している平面場を研究した [3, 4, 5, 10]. この平面場は写像 $\Lambda : S^{2n-1} \rightarrow G(2n-2, 2n)$ を定義する. ここで $G(2n-2, 2n)$ は $\mathbb{R}^{2n}$ 内の向き付けられた $(2n-2)$ 次元の平面場によるグラスマン多様体である. Neumann と Rudolph はホモトピー群 $\pi_{2n-1}(G(2n-2, 2n))$ が

$$\pi_{2n-1}(S^{2n-1}) \oplus \pi_{2n-1}(S^{2n-2}) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/r\mathbb{Z}$$

と同型であることを示した. ここで $n=2$ のとき $r=0$ で $n>2$ のとき $r=2$ とする. さらに, Λ のホモトピー類は $((-1)^n \mu(K), \lambda(K)) \in \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/r\mathbb{Z}$ と表すことができることを示した. この整数の組 $((-1)^n \mu(K), \lambda(K))$ のことを enhanced Milnor 数と呼び, $\lambda(K)$ のことを Milnor 数の enhancement と呼ぶ.

本稿では, mixed 多項式 $f(\mathbf{z}, \bar{\mathbf{z}})$ から定まる単純なファイバー絡み目 K_f の enhancement $\lambda(K_f)$ を考察する. その主結果は次のとおりである.

定理 3. 任意の $k \in \mathbb{Z}/r\mathbb{Z}$ に対して, $\lambda(K_f) = k$ を満たすファイバー束 $f/|f| : S_\varepsilon^{2n-1} \setminus K_f \rightarrow S^1$ をもつ mixed 多項式 $f(\mathbf{z}, \bar{\mathbf{z}})$ が存在する.

$n = 2$ のとき, 主定理の証明は次のようなタイプの mixed 多項式を考察する:

$$f_{p,q,m_+,m_-}(\mathbf{z}, \bar{\mathbf{z}}) := \prod_{j=1}^{m_+} (z_1^p + \alpha_j z_2^q) \overline{\prod_{j=m_++1}^{m_++m_-} (z_1^p + \alpha_j z_2^q)} \quad (m_+ > m_-).$$

ここで $\alpha_j \neq \alpha_{j'} \ (j \neq j')$, $\overline{z_1^p + \alpha_j z_2^q}$ は $z_1^p + \alpha_j z_2^q$ の複素共役を表し, p と q は互いに素な正の整数とする. $\alpha_j \neq \alpha_{j'} \ (j \neq j')$ という条件から, この mixed 多項式 $f_{p,q,m_+,m_-}(\mathbf{z}, \bar{\mathbf{z}})$ は強非退化である. また $f_{p,q,m_+,m_-}(\mathbf{z}, \bar{\mathbf{z}})$ は真に非退化なので, 原点 $\mathbf{o}$ は $f_{p,q,m_+,m_-}(\mathbf{z}, \bar{\mathbf{z}})$ の孤立特異点である. よって, $K_{f_{p,q,m_+,m_-}} := S_\varepsilon^3 \cap f_{p,q,m_+,m_-}^{-1}(0)$ は 3 次元球面 S_ε^3 内の向き付けられたファイバー絡み目であることがわかる. $K_{f_{p,q,m_+,m_-}}$ がファイバー絡み目であることは, A. Pichon と J. Seade による原点に孤立特異点をもつ複素多項式 $(f, \mathbf{o})$ と $(g, \mathbf{o})$ が共通の多項式で割り切れないうとき, $f\bar{g}/|f\bar{g}| : S^3 \setminus K_{f\bar{g}} \rightarrow S^1$ がファイバー束になるという結果からも従う [8, 9].

S_ε^3 に次のような S^1 作用を定義する:

$$s \circ (z_1, z_2) = (s^q z_1, s^p z_2), \quad s \in S^1.$$

このとき $f_{p,q,m_+,m_-}(\mathbf{z}, \bar{\mathbf{z}})$ は次の等式をみたす:

$$f_{p,q,m_+,m_-}(s \circ \mathbf{z}, \overline{s \circ \mathbf{z}}) = s^{pq(m_+-m_-)} f_{p,q,m_+,m_-}(\mathbf{z}, \bar{\mathbf{z}}).$$

$m_+ > m_-$ という条件から, $f_{p,q,m_+,m_-}(\mathbf{z}, \bar{\mathbf{z}})$ は polar weighted homogeneous であることもわかる. この S^1 作用を用いて S^3 上にベクトル場を構成することで, この mixed 多項式から定まるファイバー絡み目の $\lambda(K_{f_{p,q,m_+,m_-}})$ は次のように表される.

補題 1. $\lambda(K_{f_{p,q,m_+,m_-}}) = (-pqm_- + p + q)m_-$.

この補題から p, q, m_+, m_- に正の整数を上手く代入すると, 1 以下の全ての整数が実現できることが示せる. 2 以上の整数は $K_{f_{p,q,m_+,m_-}}$ の鏡像の enhancement として実現できる.

5. 補足

$n = 2$ のとき, enhanced Milnor 数はファイバー絡み目 K のファイバー曲面が 2 つのファイバー絡み目 K_1 と K_2 のファイバー曲面の村杉和で表されるならば, $\lambda(K)$ は $\lambda(K_1) + \lambda(K_2)$ になる [3]. 一般には複素多項式の特異点の絡み目は, 正ブレイドの閉包で表される. それにより複素多項式の Milnor 束のファイバー曲面が正のホップ・プランピング (Hopf plumbing) から得られることがわかる. 正のホップ・リンクの enhancement は 0 なので, 複素多項式 $f(\mathbf{z})$ から定まるファイバー絡み目 K_f の Milnor 数の enhancement $\lambda(K_f)$ は常に 0 である. また負のホップ・リンクの enhancement は 1 なので, 負のホップ・プランピングで得られるファイバー絡み目の enhancement は正の整数になる.

主定理から mixed 多項式 $f(\mathbf{z}, \bar{\mathbf{z}})$ から定まるファイバー絡み目 K_f で enhancement $\lambda(K_f)$ が負の整数になるものが存在する. よって, そのような K_f のファイバー曲面はホップ・プランピングだけでは得られないこともわかる.

REFERENCES

- [1] D. Eisenbud and W. Neumann, *Three-Dimensional Link Theory and Invariants of Plane Curve Singularities*, Annales of Mathematics Studies 110, Princeton University Press, Princeton, N.J., 1985.
- [2] J. Milnor, *Singular points of complex hypersurfaces*, Annales of Mathematics Studies 61, Princeton University Press, Princeton, N.J., 1968.
- [3] W. Neumann and L. Rudolph, *Unfoldings in knot theory*, Math. Ann. **278** (1987), 409–439.
- [4] W. Neumann and L. Rudolph, *The enhanced Milnor number in high dimensions*, Differential Topology Proceedings, Siegen 1987, Springer Lecture Notes in Math. 1350, Springer-Verlag, 1988, pp.109–121.
- [5] W. Neumann and L. Rudolph, *Difference index of vectorfields and the enhanced Milnor number*, Topology, **29** (1990), 83–100.
- [6] M. Oka, *Topology of polar weighted homogeneous hypersurfaces*, Kodai Math. J., **31** (2008), 163–182.
- [7] M. Oka, *Non-degenerate mixed functions*, Kodai Math. J., **33** (2010), 1–62.
- [8] A. Pichon *Real analytic germs $f\bar{g}$ and open-book decompositions of the 3-sphere*, Internat. J. Math., **16** (2005), 1–12.
- [9] A. Pichon and J. Seade, *Fibered multilinks and real singularities $f\bar{g}$* , Math. Ann., **324** (2008), 487–514.
- [10] L. Rudolph, *Isolated critical points of maps from $\mathbb{R}^4$ to $\mathbb{R}^2$ and a natural splitting of Milnor number of a classical fibered link. Part1*, Comment. Math. Helv., **62** (1987), 630–645.

MATHEMATICAL INSTITUTE, TOHOKU UNIVERSITY, SENDAI 980-8578, JAPAN

E-mail address: sb0d02@math.tohoku.ac.jp