# 有理ザイフェルト行列の特徴付け

芝田賢史
大阪市立大学大学院理学研究科

古典的な絡み目のザイフェルト行列はザイフェルト曲面から誘導される正方行列で各成分が整数のものである．ザイフェルト行列の $S$ 同値類は絡み目の不変量であることが知られている ([8], [6], [5])．ザイフェルト行列はいくつかの絡み目不変量を誘導する．例えば，絡み目のアレクサンダー多項式はザイフェルト行列から求められる ([1], [10])．有理ザイフェルト行列とは有理ホモロジー 3 球面内の null-homologous な絡み目に対して定まる有理数を成分とする正方行列のことである．その名前が示唆するように有理ザイフェルト行列は通常のザイフェルト行列の一般化である．古典的な場合と同様に，有理ザイフェルト行列の $S$ 同値類は絡み目の不変量となる．その結果，古典的な場合からの類推によって有理ホモロジー 3 球面内の絡み目のアレクサンダー多項式が定義される．本稿では，有理ザイフェルト行列の特徴付けを与える．さらにアレクサンダー多項式の特徴付けについても触れる．

## 1　有理ホモロジー 3 球面と有理絡み目

向き付け可能な 3 次元閉多様体 $M$ が有理ホモロジー 3 球面であるとは $M$ が $\mathbb{S}^3$ の有理ホモロジーを持つことをいう．例えば，$(p,q)$ 型レンズ空間は $p \neq 0$ のとき有理ホモロジー 3 球面である．後述するように，有理ホモロジー 3 球面内では $\mathbb{S}^3$ と同様に絡み数を考えることができる．ただし，古典的な絡み数が整数であるのに対して有理ホモロジー 3 球面での絡み数は有理数である．

具体的な有理ホモロジー 3 球面を扱うには $\mathbb{S}^3$ 内の絡み目に沿ったデーン手術を考えるのが便利である．まずはデーン手術を思い出そう．いま $J$ を $\mathbb{S}^3$ 内の（枠付き）絡み目とする．このとき $J$ の管状近傍を取り除いて得られる（境界付き）多様体の（トーラス状の）境界に沿ってソリッド・トーラスを貼り付けて得られる多様体 $\chi(J)$ を $J$ に沿った $\mathbb{S}^3$ のデーン手術で得られた多様体というのであった．任意の向き付け可能な 3 次元閉多様体は適当な絡み目 $L \subset \mathbb{S}^3$ に沿ったデーン手術で得られることが知られている ([7], [11])．このことから，任意の有理ホモロジー 3 球面も適当な絡み目に沿ったデーン手術で得られることが従う．

有理絡み目とは有理ホモロジー 3 球面 $M$ とその中の絡み目 $L$ の組 $(M, L)$

のことである．古典的な結び目理論では $(\mathbb{S}^3, L)$ という形をした有理絡み目の研究がされていることになる．紛らわしくなければ，簡単に $L$ を有理絡み目と呼ぶ．有理絡み目を視覚化するために手術表示を用いる．いま $J \cup L$ を古典的な絡み目とし $J$ には枠が付けられているとしよう．このとき $L$ は $J$ に沿った $\mathbb{S}^3$ のデーン手術で得られる多様体 $\chi(J)$ 内の絡み目と見なすことができる．ここで $\chi(J)$ が有理ホモロジー 3 球面であれば $(\chi(J), L)$ は有理絡み目である．そこで絡み目 $J \cup L$ を有理絡み目 $(\chi(J), L)$ の手術表示と呼ぶ．

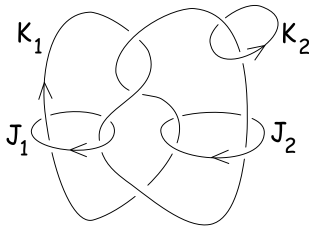


図 1: 手術表示の例

## 2　有理ザイフェルト行列

$L$ を有理絡み目とする．向き付けられた連結コンパクト曲面 $F$ が $\partial F = L$ を満たすとき，その曲面 $F$ を $L$ のザイフェルト曲面という．よく知られているように，すべての古典的な絡み目はザイフェルト曲面を持つ．一方で，有理絡み目の中にはザイフェルト曲面を持たないものが存在する．与えられた有理結び目がザイフェルト曲面を持つかどうかはホモロジー的な条件を見ればよい．有理絡み目 $(M, L)$ が null-homologous であるとは

$$[L] = 0 \in H_1(M)$$

を満たすことをいう．簡単に分かるように，有理絡み目 $(M, L)$ がザイフェルト曲面を持てば null-homologous である．次の定理はこの逆が成り立つことをも主張する．

**定理 2.1** 有理絡み目 $(M, L)$ がザイフェルト曲面をもつ必要十分条件は $(M, L)$ が *null-homologous* となっていることである．

有理ザイフェルト行列を説明するために，まず有理絡み数について述べる．$M$ を有理ホモロジー 3 球面とし $a$, $b$ を $M$ 内の互いに交わらないループとする．このとき $a$ と $b$ の絡み数 $\mathrm{lk}_M(a, b)$ は次のように定められる．自然数 $n$ で $n[a] = 0 \in H_1(M)$ を満たすものをひとつ選んで固定する．($M$ が有理ホモロジー 3 球面のとき $H_1(M)$ の位数は有限なのでこのような $n$ は必ず存在する

ことに注意せよ.）いま $c$ を $M$ の 2-チェインで $\partial c = na$ を満たすものとし，$\mathrm{lk}_M(a,b)$ を

$$\mathrm{lk}_M(a,b) = \frac{\mathrm{Int}_M(c,b)}{n} \in \mathbb{Q}$$

で定義する．ここで $\mathrm{Int}_M$ は $M$ の交叉数である．有理絡み数は $a$ と $b$ だけで決まり，自然数 $n$ の選び方と 2-チェイン $c$ の選び方には依存しない．次に有理ザイフェルト行列を定義する．いま，$F$ を有理絡み目 $L$ のザイフェルト曲面とし，$\{[x_1], \ldots, [x_n]\}$ を $H_1(F)$ の基底とする．このとき $L$ の有理ザイフェルト行列とは有理数を成分に持つ正方行列 $V = (v_{ij})$ であって $v_{ij} = \mathrm{lk}_M(x_i^+, x_j^-)$ で定義されるものである．ここで $x_i^+$ と $x_j^-$ はそれぞれ $x_i$ と $x_j$ を $F$ の正方向と負方向にすこしだけ動かしたものを表す．定義から明らかなように，有理ザイフェルト行列はザイフェルト曲面 $F$ と $H_1(F)$ の基底の選び方に依存する．次の定理は，この曖昧さを行列の言葉に置き換えたものである：

**定理 2.2** 有理絡み目 $L$ のザイフェルト行列の $S$ 同値類は $L$ だけに依存する．

ここでふたつの有理正方行列 $V, W$ が $S$ 同値であるとは，ある有理正方行列の有限列

$$V = A_0, A_1, \ldots, A_n = W$$

で次の条件を満たすものが存在することをいう：$A_i$ と $A_{i+1}$ は次の (i)，(ii) のいずれかの関係にある．(i) 有理数 $x$ と有理ベクトル $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ に対して，

$$A_{i+1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \mathbf{0} \\ 1 & x & \boldsymbol{u} \\ \mathbf{0}^T & \boldsymbol{v}^T & A_i \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & \mathbf{0} \\ 0 & x & \boldsymbol{u} \\ \mathbf{0}^T & \boldsymbol{v}^T & A_i \end{pmatrix}$$

または

$$A_i = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \mathbf{0} \\ 1 & x & \boldsymbol{u} \\ \mathbf{0}^T & \boldsymbol{v}^T & A_{i+1} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & \mathbf{0} \\ 0 & x & \boldsymbol{u} \\ \mathbf{0}^T & \boldsymbol{v}^T & A_{i+1} \end{pmatrix}.$$

(ii) 適当なユニモジュラー行列 $P$ が存在して $A_{i+1} = PA_iP^T$.

定理の証明は古典的な場合と同様に任意のふたつのザイフェルト曲面がハンドル同値であることを示すことで行われる．

# 3 主定理

まずはザイフェルト型行列について説明する．有理数を成分とする正方行列 $V$ がザイフェルト型であるとは，あるユニモジュラー行列 $P$ が存在して

$$P(V - V^T)P^T = \bigoplus^{g} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \oplus O^{r-1}$$

を満たすことをいう．ここで $g \geq 0$ と $r \geq 1$ は適当な整数である．よく知られているように，古典的なザイフェルト行列はザイフェルト型である．また，整数を成分に持つザイフェルト型行列は古典的な絡み目のザイフェルト行列として実現できることも知られている ([5])．次の定理はこの主張の一般化を与える．これが本稿での主定理である．

**定理 3.1** 有理数を成分に持つ正方行列が有理ザイフェルト行列である必要十分条件はそれがザイフェルト型であることである．

有理絡み目 $L$ のアレクサンダー多項式とは $L$ の有理ザイフェルト行列 $V$ を用いて定義される多項式

$$\Delta_L(t) = \det(tV - V^T) \in \mathbb{Q}[t^{\pm 1}]$$

のことである．$V$ の $S$ 同値類は $L$ だけで決まるので，$\Delta_L(t)$ は $t^m$ 倍を除いて $L$ だけで決まることが分かる．

**定理 3.2** 多項式 $f(t) \in \mathbb{Q}[t^{\pm 1}]$ がアレクサンダー多項式である必要十分条件は $f(t)$ が *(i)* $f(1) = 1$ と *(ii)* $f(t^{-1}) = t^{-2n} f(t)$ を満たすことである．

この定理の証明はザイフェルト型行列 $V$ で $\det(tV - V^T) = f(t)$ を満たすものを構成することで行われる．具体的な構成は Burde-Ziechang [2] の方法を用いて行われる．

# 4 証明のアイディア

このセクションでは定理 3.1 の証明のアイディアを述べる．必要条件は古典的な場合と同様にして確かめられるので，ここでは十分条件であることの証明のアイディアだけを説明する．

いま $V$ をザイフェルト型行列とする．このとき，一般性を失うことなく

$$V - V^T = \bigoplus^{g} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \oplus O^{r-1}$$

と仮定してよい．行列 $V_0$ を

$$V_0 = \bigoplus^{g} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \oplus O^{r-1}$$

で定義すると，$V - V^T = V_0 - V_0^T$ なので $W = V - V_0$ は対称行列であることが分かる．線型代数の一般論から，ある可逆行列 $P$ と対角行列 $D$ で

$$W = PDP^T$$

を満たすものが存在する．そのとき自然数 $k$ で $kP$ が整数行列となるようなものをひとつ選んで固定する．この $k$ に対して

$$W = (kP)(1/k^2)D(kP)^T$$

である．簡単のために $kP$ の $(i,j)$ 成分を $u_{ij}$ で表す．このとき $k$ の選び方から $u_{ij}$ は整数である．

まずは $\det D \neq 0$ の場合を考える．これは $D$ の対角成分の中にゼロがないことと同値である．このとき図 2 のような曲面 $F \subset \mathbb{S}^3$ と $H_1(F)$ の基底 $\{[x_1], \ldots, [x_{2g+r-1}]\}$ を考える．簡単に分かるように $V_0$ は $L_0 = \partial F$ のザイ

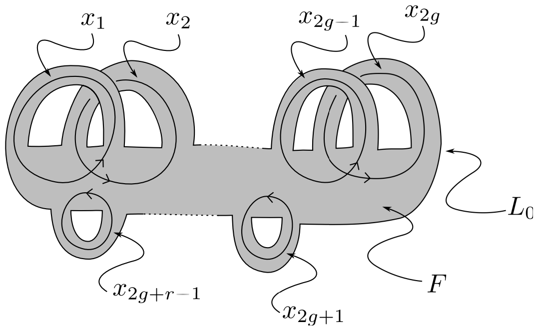


図 2: 曲面 $F$

フェルト行列として実現される．次に $F$ の外部に枠付き絡み目 $J = J_1 \cup \cdots \cup J_r$ で，その絡み行列が $D^{-1}$ となるものを配置する．ここで $J_i$ に対して図 3 の

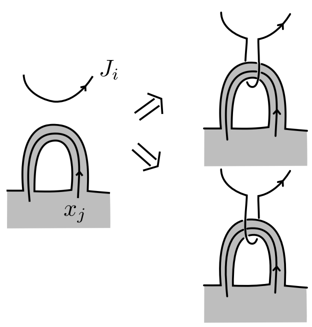


図 3: 変形操作

ような変形を繰り返すことで $\mathrm{lk}_{\mathbb{S}^3}(J_i, x_j) = u_{ij}$ と仮定できる．このとき次の定理によって有理絡み目 $(\chi(J), L)$ の有理ザイフェルト行列が $V$ であることが確かめられる．

**定理 4.1 ([4], [3], [9])** 枠付き絡み目 $J \subset \mathbb{S}^3$ が有理ホモロジー 3 球面を生み出すとする．$A$ を $J$ の絡み行列とする．このとき $\mathbb{S}^3 \setminus J$ 内の単純閉曲線 $a$,

$b$ に対して

$$\mathrm{lk}_{\chi(J)}(a,b) = \mathrm{lk}_{\mathbb{S}^3}(a,b) - \boldsymbol{x}^T A^{-1}\boldsymbol{y}.$$

ここで $\boldsymbol{x} = (\mathrm{lk}_{\mathbb{S}^3}(a,J_1),\ldots,\mathrm{lk}_{\mathbb{S}^3}(a,J_r))^T$, $\boldsymbol{y} = (\mathrm{lk}_{\mathbb{S}^3}(b,J_1),\ldots,\mathrm{lk}_{\mathbb{S}^3}(b,J_r))^T$.

次に $\det D = 0$ つまり $D$ の対角成分の中にゼロが含まれている場合を考える．もし $D$ がゼロ行列であれば $V = V_0$ なので $V$ は古典的な絡み目のザイフェルト行列として実現できる．$D$ がゼロ行列でない場合を考える．まず

$$(1/k^2)D = (q_1) \oplus \cdots \oplus (q_s) \oplus O^{r-1-s}, \quad q_i \neq 0$$

としよう．簡単のために $D' = (q_1) \oplus \cdots \oplus (q_s)$ とする．このとき $kP$ を

$$kP = (P_1 P_2)$$

と分割する．ここで $P_1$ は $2g \times s$ 行列であり，$P_2$ は $2g \times (2g-s)$ 行列である．直接計算から確かめられるように $W = P_1 D' P_1^T$ となる．$\det D' \neq 0$ なので後は $\det D \neq 0$ の場合と同様にすればよい．

## 参考文献


[1] J. W. Alexander. Topological invariants of knots and links. *Trans. Amer. Math. Soc.*, Vol. 30, No. 2, pp. 275–306, 1928.

[2] G. Burde and H. Zieschang. *Knots*, Vol. 5 of *de Gruyter Studies in Mathematics*. Walter de Gruyter & Co., Berlin, second edition, 2003.

[3] J. C. Cha and K. H. Ko. Signatures of links in rational homology spheres. *Topology*, Vol. 41, No. 6, pp. 1161–1182, 2002.

[4] J. Hoste. A formula for Casson's invariant. *Trans. Amer. Math. Soc.*, Vol. 297, No. 2, pp. 547–562, 1986.

[5] A. Kawauchi. *A survey of knot theory*. Birkhäuser Verlag, Basel, 1996.

[6] J. Levine. An algebraic classification of some knots of codimension two. *Comment. Math. Helv.*, Vol. 45, pp. 185–198, 1970.

[7] W. B. R. Lickorish. A representation of orientable combinatorial 3-manifolds. *Ann. of Math. (2)*, Vol. 76, pp. 531–540, 1962.

[8] K. Murasugi. On a certain numerical invariant of link types. *Trans. Amer. Math. Soc.*, Vol. 117, pp. 387–422, 1965.

[9] J. H. Przytycki and A. Yasuhara. Linking numbers in rational homology 3-spheres, cyclic branched covers and infinite cyclic covers. *Trans. Amer. Math. Soc.*, Vol. 356, No. 9, pp. 3669–3685, 2004.