Nonminimal bridge positions of torus knots are stabilized

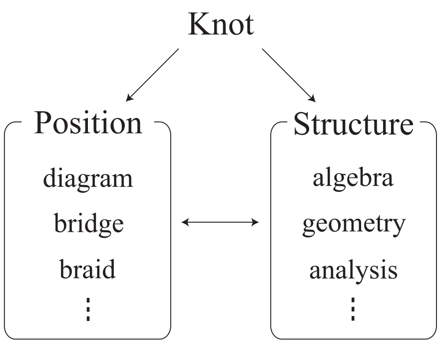
小沢　誠（駒澤大学総合教育研究部）

2011 年 12 月 26 日

§1 Knot Theory

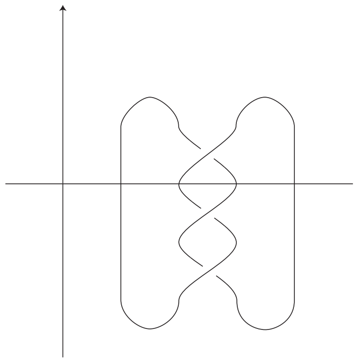
3 次元球面に埋め込まれた円周を結び目という。二つの結び目が同値であるとは、一方を他方に移すアンビエントイソトピーが存在するときをいう。与えられた二つの結び目が同値であるかどうか判定すること、更に同値な場合はどのように移り合うか記述することが、結び目理論の基本的問題である。

ある結び目が 3 次元球面においてどのような位置を取り得るのかが分かれば、その結び目と同値か否かがが分かる。一方、結び目に対して様々な構造を導入して、結び目全体の構造を理解することが結び目理論の主な手法である。結び目の位置と構造の間の関係の理解が、結び目理論の理解であると言える。



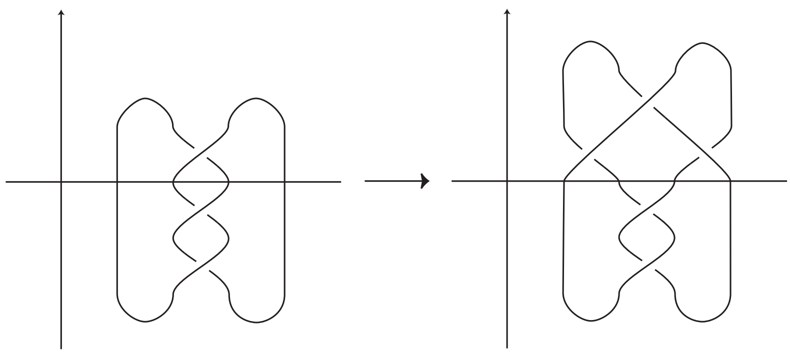
§2 Bridge position

3 次元球面の標準的なモース関数に対して、結び目の全ての極大点と全ての極小点を分離するレベル球面（橋球面）が存在するとき、橋位置であるという（[11]）。



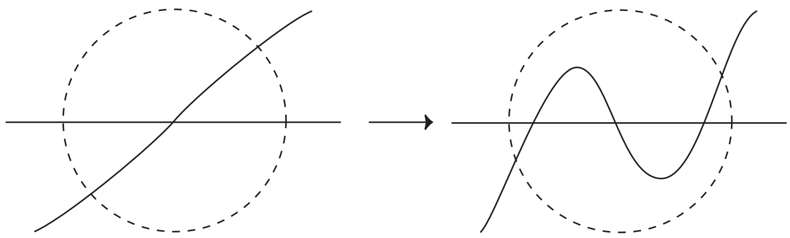
§3 Isotopic

二つの橋位置がイソトピックであるとは、各レベルにおいて橋位置であるようなアンビエントイソトピーが存在するときをいう（[7]）。



§4 Stabilization

橋位置にある結び目と橋球面の交点において、極大点と極小点を 1 点ずつ増やす局所的な変形を stabilization という。stabilization によって得られる橋位置を stabilized という（[7]）。



§5 Knot equivalence

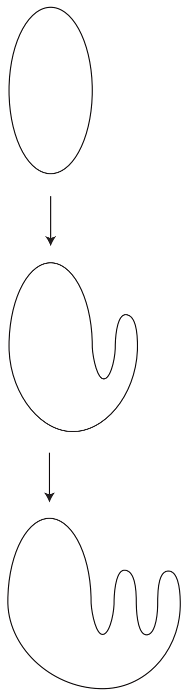
{ 結び目 }/アンビエントイソトピー
= { 橋位置 }/イソトピー &(de)stabilization

結び目全体の集合をアンビエントイソトピーで割った同値類は、橋位置をイソトピー及び、stabilization とその逆の操作 destabilization で割った同値類と一致する（[2], [4], [13]）。この事実は、橋球面上の橋表示において、ライデマイスター移動が橋イソトピー及び stabilization で実現できることから分かる。従って、任意の二つの橋位置は stably equivalent である。

§6 Trivial knot

Theorem ([7], [5], [9])

Any non-minimal bridge position of the trivial knot is stabilized.

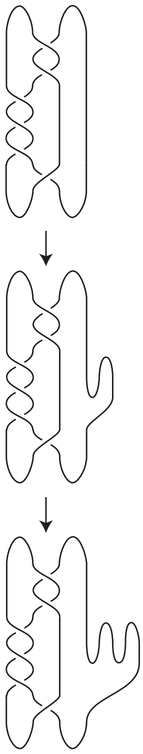


Otal の結果より、自明な結び目の n-橋位置は各 n について一意的である。

§7 2-bridge knot

Theorem ([8], [10])

Any non-minimal bridge position of a 2-bridge knot is stabilized.



Otal の結果と Schubert の 2 橋結び目の分類定理（[12]）を合わせると、2-橋結び目の n-橋位置は各 n について高々二つであることが分かる。

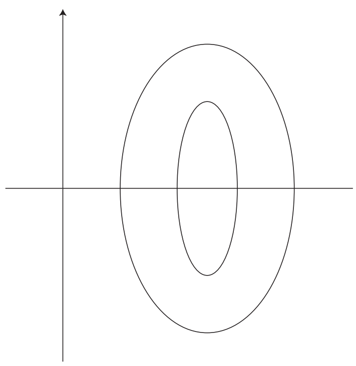
§8 Torus knot

Theorem（[9]）

Any non-minimal bridge position of a torus knot is stabilized.

Corollary（[9]）

A knot K with an n-bridge position is torus if and only if there exists a torus $F \supset K$ which intersects the bridge sphere in two essential loops.



§9 Problem

結び目の非最小橋位置は stabilized か？即ち、destabilization によって最小橋位置にできるか？言い換えると、'橋木' の任意の葉は最小橋数か？

[13] において、結び目の任意のモース位置は、stabilization に対応する Type I 変形と、weakly reducible に対応する Type II 変形により、移り合うことが示されている。上の問題に対応して、結び目の非最小幅モース位置は、Type I 及び Type II の変形により、幅を短調に減らしていき、最小幅モース位置にできるか？という問題が考えられる。しかしながら、この問題は自明な結び目にでさえ成り立たないことが発見された（[1]）。

§10 Finiteness

Theorem ([3])

There exist only finitely many n-bridge positions for a hyperbolic knot.

Theorem ([6])

There exists a 3-bridge link which admits infinitely many 3-bridge positions.

§11 Proof

K：橋位置にあるトーラス結び目
S：橋球面
$F \supset K$：トーラス

Lemma 1

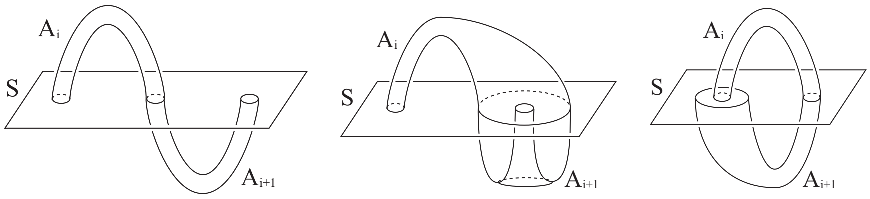
The pair (F, K) can be isotoped in its isotopy class so that F has no inessential saddle point.

Lemma 2

If $|F \cap S| \geq 4$, then one of the following holds.

1. All pairs of adjacent annuli are normal.
2. There exists a turning pair of adjacent annuli.

Lemma 2 のいずれの場合も、K は stabilized である。

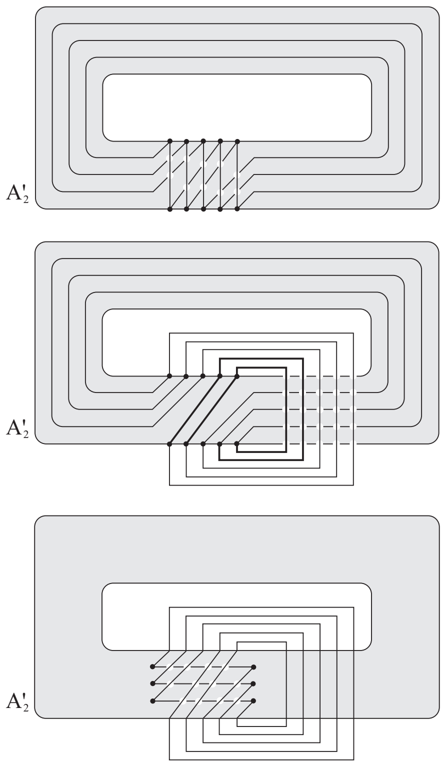


Normal　Turning　Reeb

Lemma 3

If $|F \cap S| = 2$, then K has a standard (p, q)-torus knot bridge diagram $(p < q)$, and it is stabilized.

実際、(p, q)-トーラス結び目橋表示は、橋イソトピー及び stabilization によって、(q, p)-トーラス結び目橋表示に変形できる。



参考文献

[1] A. Zupan, *Unexpected local minima in the width complexes for knots*, Algebraic & Geometric Topology 11 (2011) 1097–1105.

[2] J. S. Birman, *On the stable equivalence of plat representations of knots and links*, Canad. J. Math. 28 (1976) 264–290.

[3] A. Coward, *Algorithmically detecting the bridge number of hyperbolic knots*, arXiv:0710.1262.

[4] C. Hayashi, *Stable equivalence of Heegaard splittings of* 1*-submanifolds in* 3*-manifolds*, Kobe J. Math. 15 (1998) 147–156.

[5] C. Hayashi and K. Shimokawa, *Heegaard splittings of the trivial knot*, J. Knot Theory Ramifications 7 (1998) 1073–1085.

[6] Y. Jang, *Three-bridge links with infinitely many three-bridge spheres*, Topology Appl. 157 (2010) 165–172.

[7] J.-P. Otal, *Présentations en ponts du nœud trivial*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 294 (1982) 553–556.

[8] J.-P. Otal, *Presentations en ponts des nœuds rationnels*, Low-dimensional topology (Chelwood Gate, 1982), 143–160, London Math. Soc. Lecture Note Ser., 95, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1985.

[9] M. Ozawa, *Nonminimal bridge positions of torus knots are stabilized*, Mathematical Proc. Camb. Phil. Soc. **151** (2011) 307–317.

[10] M. Scharlemann and M. Tomova, *Uniqueness of bridge surfaces for 2-bridge knots*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 144 (2008) 639–650.

[11] H. Schubert, *Über eine numerische Knoteninvariante*, Math. Z. 61 (1954) 245–288.

[12] H. Schubert, *Über Knoten mit zwei Brücken*, Mathematische Zeitschrift 65 (1956) 133–170.

[13] J. Schultens, *Width complexes for knots and 3-manifolds*, Pacic J. Math. 239 (2009) 135–156.