

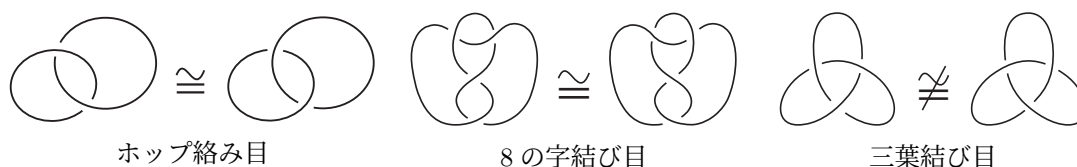
もろて型絡み目の構成

小畠 陽児

大阪市立大学大学院理学研究科修士二年

1 はじめに

絡み目の対称性の一つにもろて性という性質がある．もろて性とは，絡み目が自身の鏡像と同等であるという性質のことであり，もろて性をもつ絡み目をもろて型絡み目 (amphicheiral link) という．すなわち空間内で変形してその射影図のすべての交点の上下が入れ替わったものにできるとき，その絡み目はもろて型絡み目である．例えば，ホップ絡み目や8の字結び目はもろて型絡み目である．一方，三葉結び目は右手系と左手系が在るように，もろて型絡み目ではない．



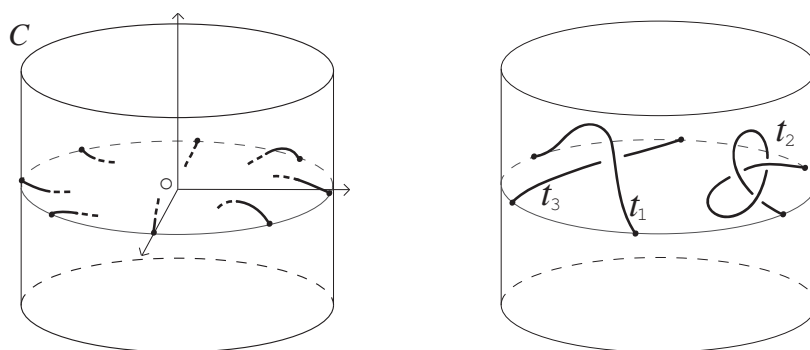
与えられた絡み目がもろて型かそうでないかを判定することは容易なことではない．11 交点までの素なもろて型絡み目については，門上晃久先生と河内明夫先生により Alexander 多項式を用いて判定されている [K, KK]．本稿では C タングルを用いてもろて型絡み目を構成する．

2 C タングルの定義

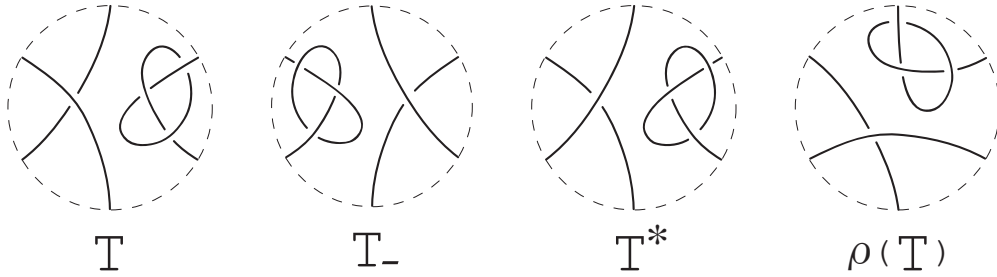
この章では C タングルを定義し，それらの和によって絡み目を構成する．まず C タングルを定義する．

定義 1. 円柱 $C = D^2 \times [-1, 1] \subset \mathbb{R}^3$ と n 本の弧 $t = \{t_1, \dots, t_n\}$ が次の条件を満たすとき，この組 (C, t) からなる n 系タングルを **C タングル** という ($n \geq 1$) :

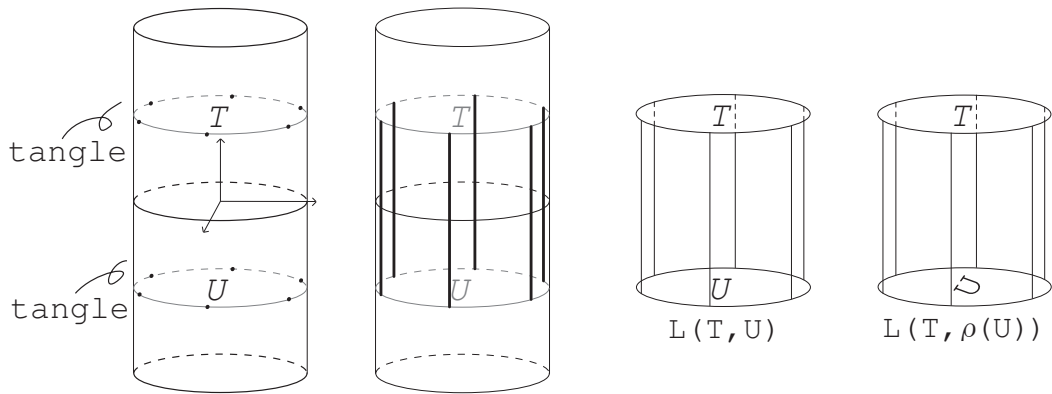
- (1) $t \cap \partial C = \bigcup_{i=1}^n \partial t_i = \{(\cos \frac{k\pi}{n}, \sin \frac{k\pi}{n}, 0) \mid k = 0, \dots, 2n-1\}$,
- (2) $t_i \cap t_j = \emptyset$ ($i \neq j$).



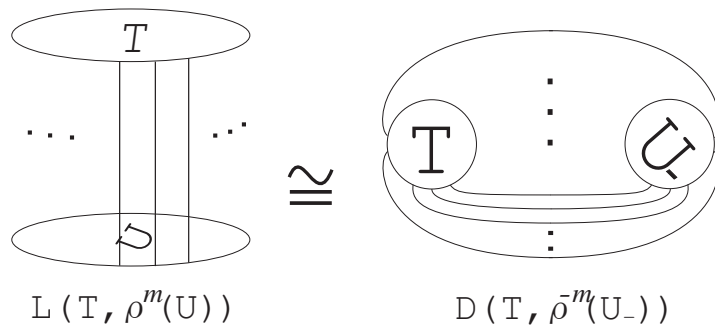
n 本の弧からなるタングルに対して写像 $f_-, f^*, \rho : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ を $f_-(x, y, z) = (x, -y, -z)$, $f^*(x, y, z) = (x, y, -z)$, $\rho(r \cos \theta, r \sin \theta, z) = (r \cos(\theta + \frac{\pi}{n}), r \sin(\theta + \frac{\pi}{n}), z)$ と定義する. ρ はタングルの弧の本数に依存するが, どの C タングルに対しても $\rho^{2n}(T) = T$ が成り立つ. ある C タングル T から f_-, f^* によって得られる C タングル $f_-(T)$, $f^*(T)$ をそれぞれ T_-, T^* と表す. 以降, タングルを図式で表すときは, 点線は ∂C に, 点線の内部は t に対応しているものとする.



2 つの n 糸 C タングルから絡み目を構成する. n 糸 C タングル T, U に対し, 下図のように T を上に, U を下にして貼り合わせ, $(\cos \frac{k\pi}{n}, \sin \frac{k\pi}{n}, 1) \in \partial T$ と $(\cos \frac{k\pi}{n}, \sin \frac{k\pi}{n}, -1) \in \partial U$ ($k = 0, \dots, 2n-1$) をまっすぐ結ぶことで得られる絡み目を $L(T, U)$ と表記する.



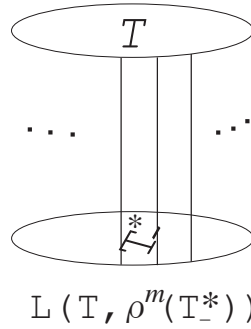
また, 絡み目 $L(T, \rho^m(U))$ から得られる下図のような絡み目図式を $D(T, \rho^m(U_-))$ と表記する.



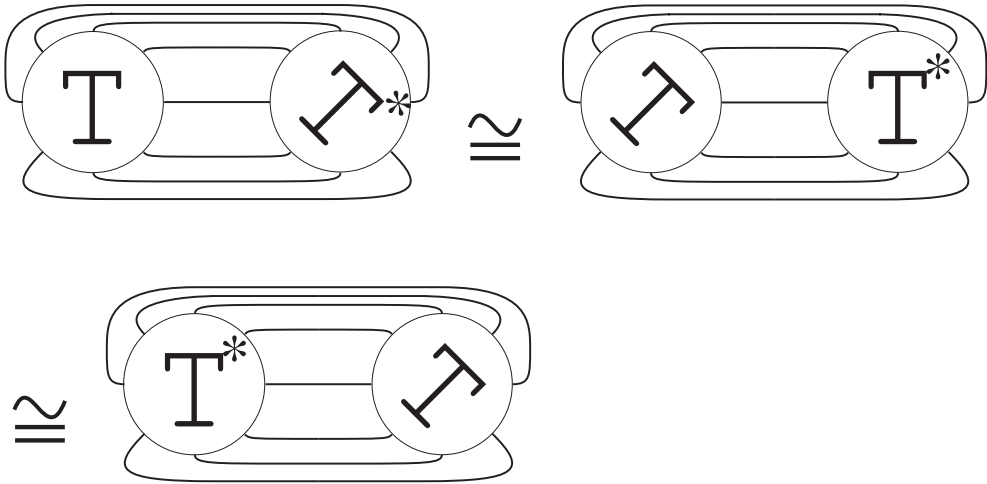
3 主結果

この章では C タングルを用いて, もろて型絡み目を構成する. 次の 3 つが主結果である.

定理 1. 任意の C タングル T に対して, 絡み目 $L(T, \rho^m(T^*))$ はもろて型絡み目である.

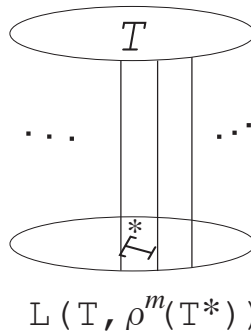


証明. 絡み目 $L(T, \rho^m(T^*))$ から図式 $D(T, \rho^{-m}(T^*))$ が得られ, 下図のような変形によりその鏡像を得る. 一つ目の変形で右側のタングルを立たせ, 二つ目の変形では左右のタングルを入れ換えている (絡み目の構成の仕方より, $D(T, U) = D(U, T)$ が成り立つ).

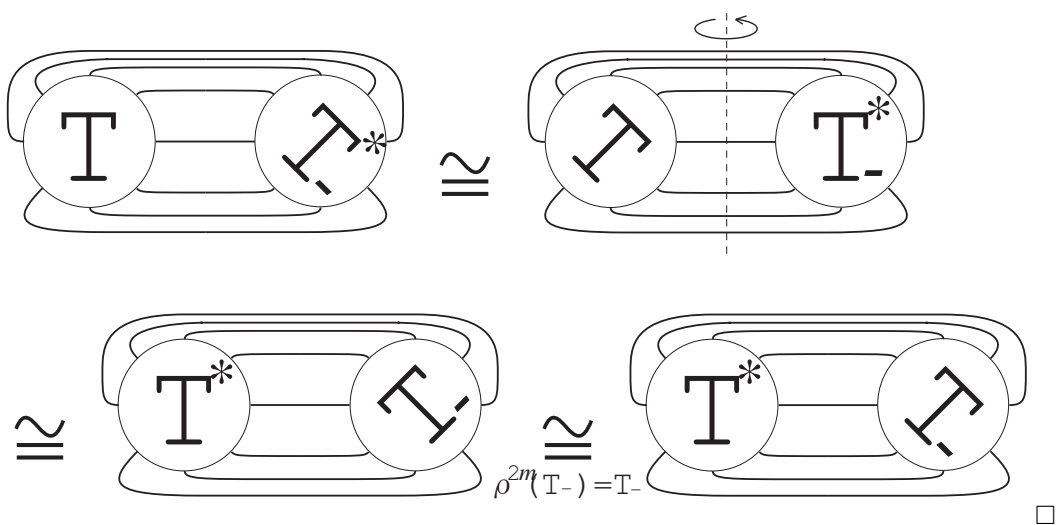


□

定理 2. C タングル T が $\rho^{2m}(T) = T$ を満たすとき, 絡み目 $L(T, \rho^m(T^*))$ はもろて型絡み目である.



証明. 絡み目 $L(T, \rho^m(T^*))$ から図式 $D(T, \rho^{-m}(T^*))$ が得られ, 次図のような変形によりその鏡像を得る. 一つ目の変形で右側のタングルを立たせ, 二つ目の変形では図式全体を回転させることで左右のタングルを入れ換えている ($D(T, U) = D(U, T)$). 最後に条件 $\rho^{2m}(T) = T$ を用いる.

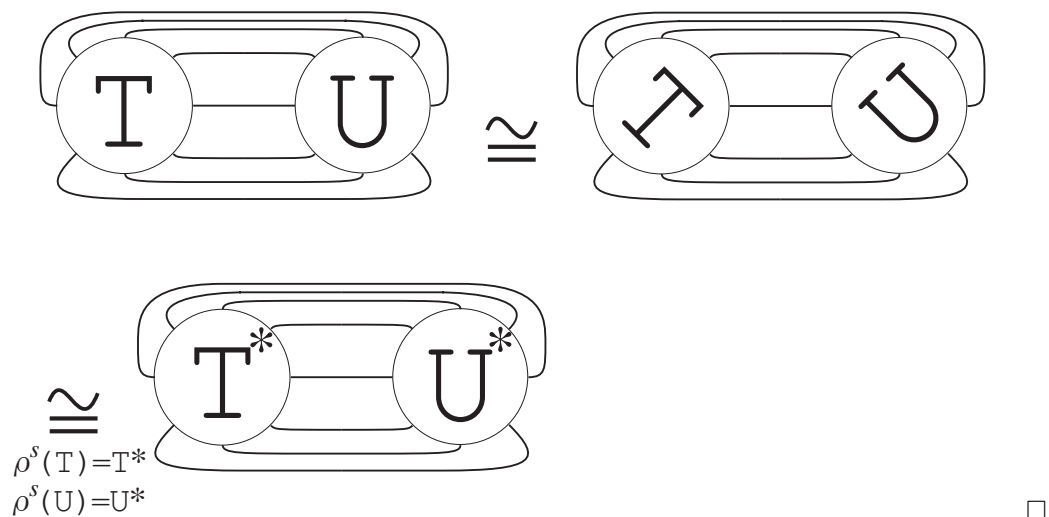


条件 $\rho^{2m}(T)=T$ は $m=0, n$ のとき常に成り立つので次のことがいえる.

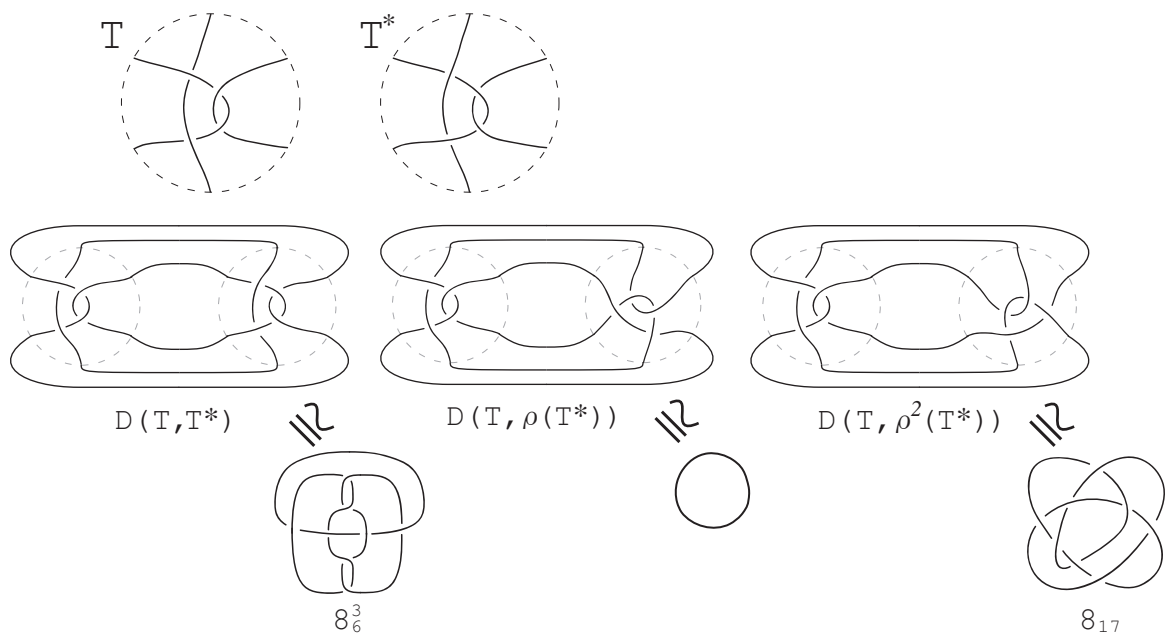
系. $L(T, T^*)$ と $L(T, \rho^n(T^*))$ はもろて型絡み目である.

定理 3. C タングル T, U が $\rho^s(T)=T^*, \rho^s(U)=U^*$ を満たすとき, 絡み目 $L(T, \rho^m(U_-))$ はもろて型絡み目である.

証明. 絡み目 $L(T, \rho^m(U_-))$ から図式 $D(T, \rho^{-m}(U))$ が得られ, 下図のような変形によりその鏡像を得る. 一つ目の変形で左右のタングルを ρ^s 回転させ, 二つ目の変形で条件 $\rho^s(T)=T^*, \rho^s(U)=U^*$ を用いる.

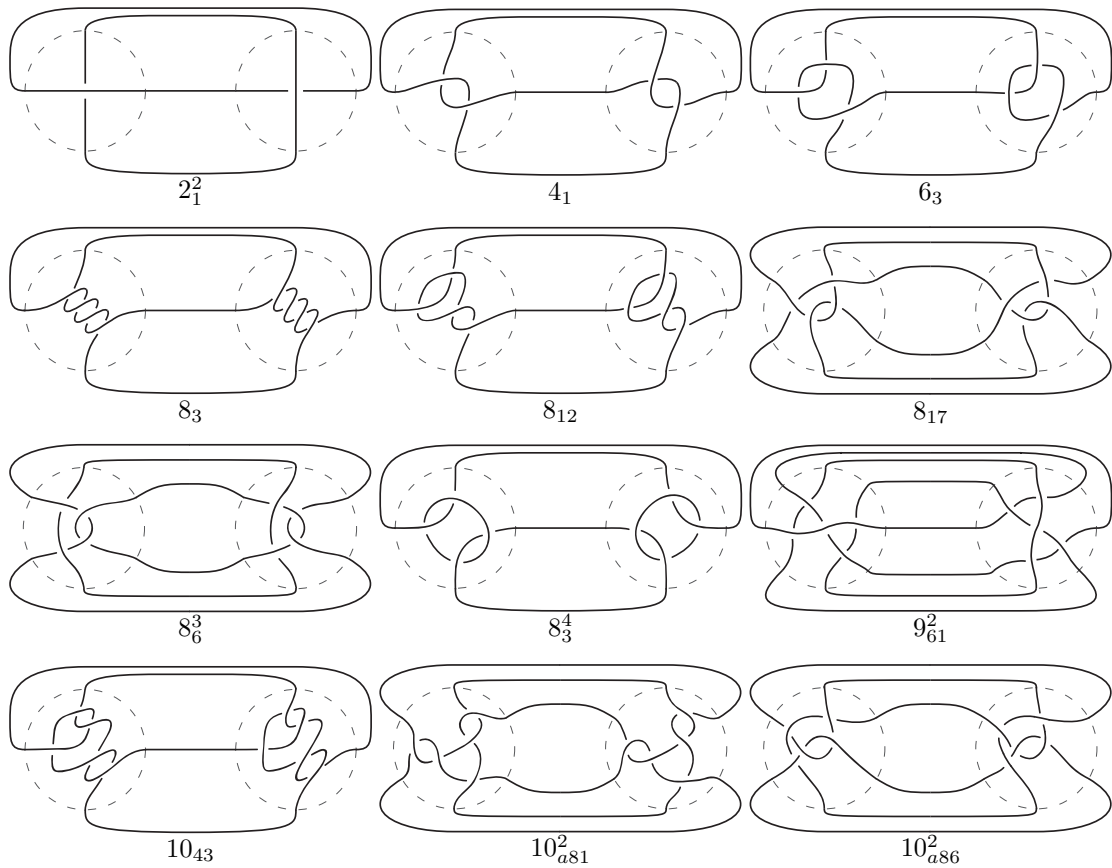


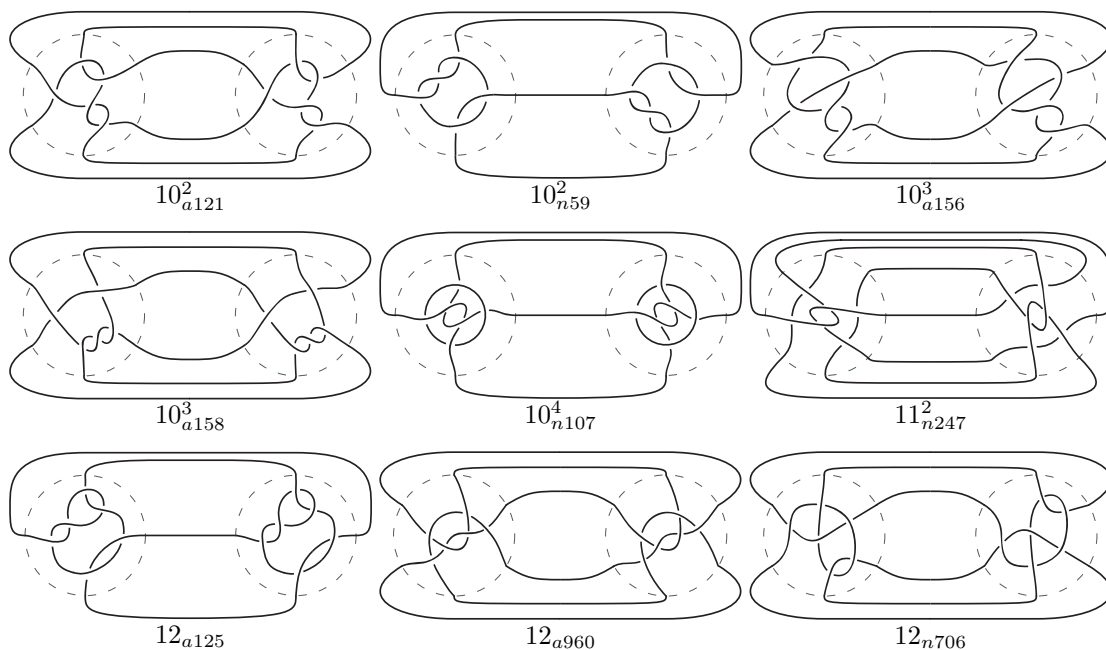
例. 次の2つのC タングル T, T^* の和によって, 自明な結び目, 8_{17} および 8_6^3 を得る. これらはもろて型絡み目として知られている.



4 12 交点以下のもろて型結び目, 11 交点以下のもろて型絡み目

素なもろて型絡み目のうち, 12 交点以下の結び目, 11 交点以下の絡み目は定理 1-3 のいずれかの形で表すことができる. ここではそのうちのいくつかを挙げる. 絡み目の表記は Rolfsen の結び目の表 [R] や web サイト [BM, CL] のものを若干変更して載せている.





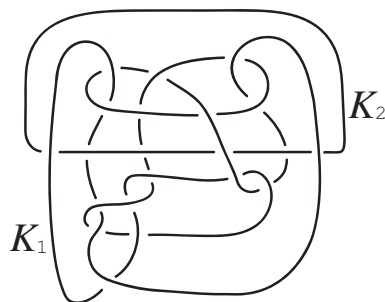
そこでこれらの結果から、次の問題が思い浮かぶ。

問題. すべてのもろて型絡み目は C タングルの和で表示できるのか。

5 21 交点成分維持もろて型絡み目の構成

この章では 21 交点の素な成分維持もろて型絡み目を構成する。 S^3 内の r 成分絡み目 $L = K_1 \cup \cdots \cup K_r$ ($r \geq 2$) に対して、 S^3 の向きを逆転する自己同相写像 φ で、 $\varphi(K_i) = K_i$ ($i = 1, \dots, r$) をみたすとき、 L は成分維持もろて型絡み目という。 11 交点以下では奇数交点の成分維持もろて型絡み目は存在しない [K]。 次の定理は 21 交点の素な成分維持もろて型絡み目に関する結果である。

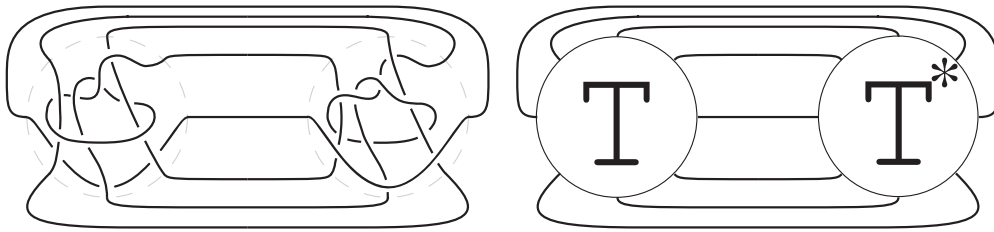
定理 4. 次の絡み目 $L = K_1 \cup K_2$ は交点数 21 の素な成分維持もろて型絡み目である。



証明. K_1 は 15 交点の結び目である。

(i) 成分維持もろて型であること

L は次図のように表すことができるのもろて型絡み目である。 また、成分維持性については明らかである。



(ii) 交点数について

L の交点は $(K_1 \text{ の自己交差}) \cup (K_2 \text{ の自己交差}) \cup (K_1 \text{ と } K_2 \text{ の交差})$ であり, K_1, K_2 の自己交差はそれぞれの最小交点数で下から評価でき, $(K_1 \text{ と } K_2 \text{ の交差})$ は $2|lk(K_1, K_2)|$ で下から評価できる. いま, $|lk(K_1, K_2)| = 3$ なので L の交点数は 21 以上である. そして 21 交点の図式が存在するので最小交点数は 21 である.

(iii) 素であること

背理法を用いて示す. L が素な絡み目でないと仮定すると, L は L_1 と L_2 の連結和 $L_1 \sharp L_2$ で表せる. K_1, K_2 は素な結び目なので $L_1 = K_1$ とおける. また, L と L_1 のコンウェイ多項式はそれぞれ $\nabla(L_1 \sharp L_2; z) = \pm(2z^{11} + 17z^9 + 51z^7 + 61z^5 + 23z^3 + 3z)$, $\nabla(L_1; z) = z^8 + 7z^6 + 16z^4 + 7z^2 + 1$ である. コンウェイ多項式の連結和の公式より, $L = L_1 \sharp L_2$ のとき $\nabla(L_1 \sharp L_2; z) = \nabla(L_1; z) \cdot \nabla(L_2; z)$ が成り立つが, これを満たす L_2 は存在しないので矛盾する. よって L は素な絡み目である.

□

謝辞

研究集会「結び目の数学 IV」において発表の機会を与えてくださいました大山淑之先生, 新國亮先生に感謝致します. また, 本研究をするにあたり数多くのアドバイスと励ましのお言葉を下さった門上晃久先生にも心より感謝致します. ありがとうございました.

参考文献

- [BM] D. Bar-Natan and S. Morrison, *The Knot Atlas*, <http://katlas.org/wiki/>.
- [CL] J.C. Cha and C. Livingston, *KnotInfo*, <http://www.indiana.edu/~knotinfo/>.
- [C] J.H.Conway, *An enumeration of knots and links, and some of their algebraic properties*, Computational Problems in Abstract Algebra (Proc. Conf., Oxford, 1967), Pergamon Press, Oxford, 1970, pp. 329-358.
- [HTW] J.Hoste, M.Thistlethwaite and J.Weeks, *The first 1,701,936 Knots*, Math. Intelligencer 20 (1998), No.4, pp. 33-48.
- [K] T.Kadokami, *Amphicheiral links with special properties, I, II*, to appear in Journal of Knot Theory and its Ramifications.
- [KK] T.Kadokami and A.Kawauchi, *Amphicheirality of links and Alexander invariants*, Science China-Mathematics, 54 (2011), 2205-2211.
- [R] D.Rolfsen, *Knots and Links*, Publish or Perish Inc., 1976.