On free knots

谷口　健太
神戸大学大学院 理学研究科 数学専攻 博士前期課程

abstruct

free knot は virtual knot の研究のために V.O.Manturov によって定義された概念である ([2]). ここでは, 交点数が 6 以下の free knot の table を作成する. さらに, Manturov により定義された free knot の不変量 $L(K)$ が任意の free knot に対して 8 で割り切れることを示す.

1　Free knot

図 1 のように 1 つの circle といくつかの chord からなる図式を *chord diagram* という.

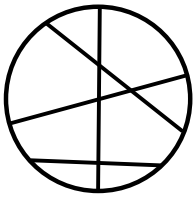
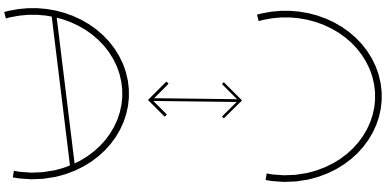


図 1: chord diagram

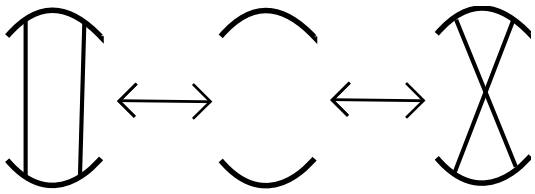
図 2 で示す chord diagram の変形 (R1), (R2), (R3) を chord diagram の *Reidemeister move* という. 2 つの chord diagram が有限回の Reidemeister move で移り合うとき, それらは同値であるという. この同値関係による chord diagram 全体の集合の同値類を *free knot* という.

注意 1.1 chord diagram とその Reidemeister move は, virtual knot の Gauss diagram とその Reidemeister move において chord の符号と向きの情報を無くしたものになっている. 実際, free knot は virtual knot を crossing change および virtualization と呼ばれる変形が生成する同値関係で割ったものと同値である ([2]) .

(R1): 自明な chord を除去/追加する変形



(R2): 2 本の chord の組でそれらの端点が circle 上で隣り合う 2 つの組になっているものを除去/追加する変形



(R3): 3 本の chord でそれらの端点が circle 上で隣り合う 3 つの組になっているものに
対して, それらの端点を一斉に入れ替える変形

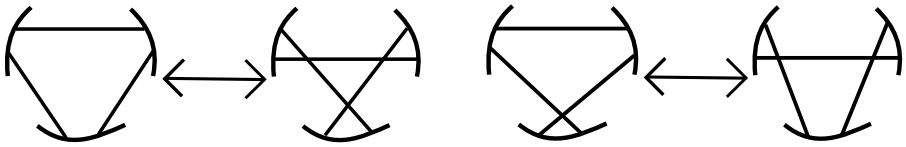


図 2: Reidemeister move

例 1.1 次の chord diagram D は図 3 で表される Reidemeister move の列により, 自明な chord diagram に変形される. したがって, D が表す free knot は自明な free knot である.

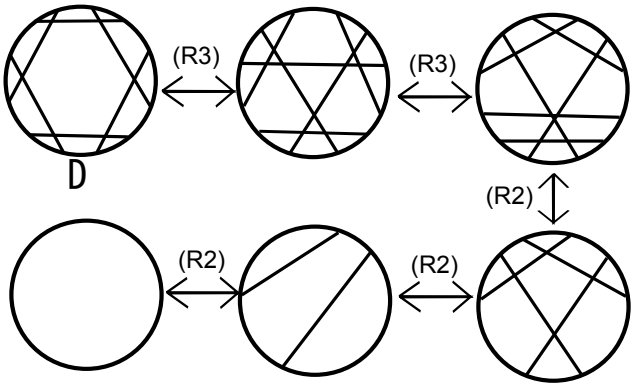


図 3: 自明な free knot

Turaev は任意の free knot は自明な free knot である, すなわち, 任意の chord diagram は有限回の Reidemeister move で自明な chord diagram に変形できると予想した. しかし, Manturov([2]) や Gibson([1]) によって, 非自明な free knot が存在することが示された. 我々の目標の 1 つは, free knot の table を作成することである.

free knot K に対して, K を表す chord diagram の chord の最小数を K の交点数という. このとき, 次の結果が得られた.

命題 1.1

- 交点数が 0 である free knot は自明な free knot のみである.
- 交点数が 1 , 2 , 3 , 4 となるような free knot は存在しない.
- 交点数が 5 である free knot は図 4 の 2 つの free knot のどちらかのみである. ただし, これらの free knot は互いに異なる.
- 交点数が 6 ならば, その free knot は図 5 の 1 4 つの free knot のうちのどれかである. ここで, 6 . 1 から 6 . 1 2 までの free knot は互いに異なり, 交差数は 6 である.

注意 1.2 T_1 と T_2 について, 5 . 1 , 5 . 2 , 6 . 1 〜 6 . 1 2 とは互いに異なることは証明できる. しかし, それらが非自明であるかどうか, また互いに異なるかどうかはまだ証明できていない.

図 4: 交点数が 5 の free knot

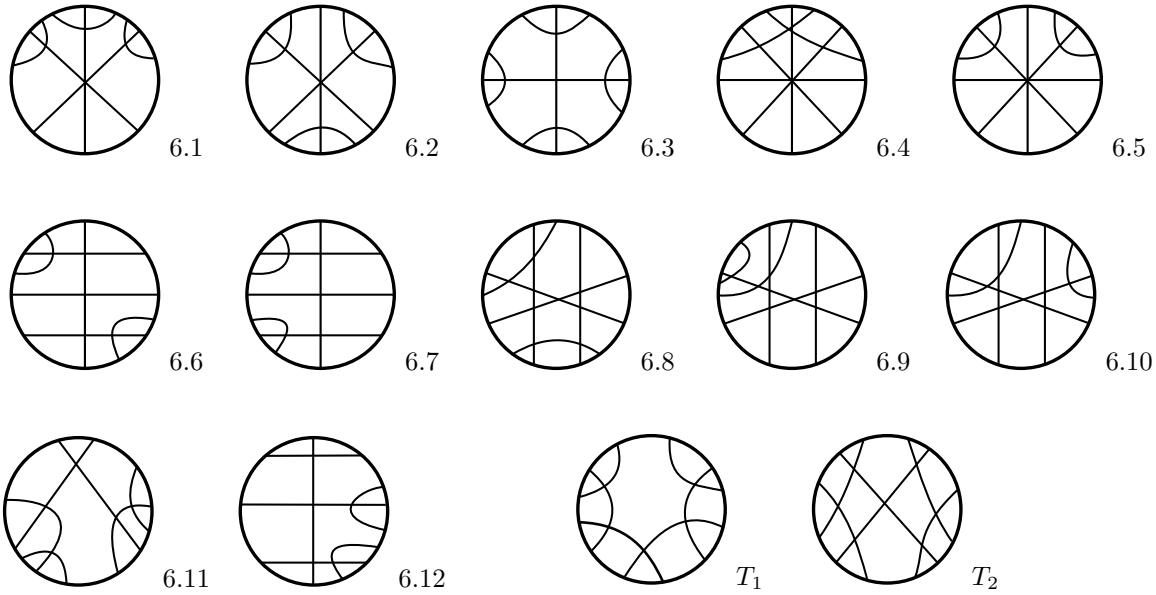


図 5: 交点数が 6 の free knot の候補

この table を作るために用いた free knot の不変量は, $L(K)$ ([4]), $\{K\}$ ([2]), $\Delta(K)$ ([1],[3]) の 3 つである. これらは Manturov や Gibson によって定義されたものである. しかし, これらでは table を完成させることができなかったので, 更に新しい不変量を構成したいと考えている.

なおここでは, 後者の 2 つの不変量については定義等を示さない. 以下 2 章では, 不変量 $L(K)$ について得られた結果を示す.

注意 1.3 注意 1.1 より, これらの不変量は自然に virtual knot の不変量となる.

2 Invariant $L(K)$

$L(K)$ は非負の整数に値をとる free knot の不変量で, Manturov により定義されたものである. この章では, まず $L(K)$ を定義し, これが任意の free knot に対して 8 で割り切れることを示す.

chord diagram において 2 本の chord が *linked* であるとは, それらの端点が circle 上で交互になっていることをいう (図 6). chord γ と linked な chord が偶数個であるとき γ は *even*, 奇数個のとき γ は *odd* であるという. さらに, odd chord γ と linked な even chord が偶数個のとき γ は *first type* の odd, 奇数個のとき *second type* の odd であるという. このような chord の even/odd の定め方を *Gaussian justified parity* という.

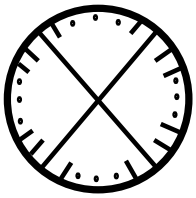


図 6:linked chords

定義 2.1 free knot K に対して, 以下の手順で $L(K)$ を定義する.

手順１ K を表す chord diagram を任意に１つ選ぶ. その chord diagram の各 chord が even, first type の odd, second type の odd のとき, その両端点にそれぞれ a, b, b' でラベルを付ける.

手順２ chord diagram の circle に対して, 任意に基点と向きをとる. 基点から向きに従って circle を１周するときに通った chord の端点のラベルを順に並べることにより, 文字 a, b, b' からなる語 w を得る.

手順３ w を群 $G = \left\langle a, b, b' \mid \begin{array}{l} a^2 = b^2 = b'^2 = 1 \\ ab = b'a \end{array} \right\rangle$ の元とみなすと, $w = (bb')^n$ となるような整数 n が存在する. このとき,

$$L(K) := 2|n|$$

と定める.

注意 2.1 G のケーリーグラフ G_c(図 7) を用いると, 手順３は次のように定義することもできる.
手順３' w に従って, G_c の辺をたどることにより, G_c 上の $(0,0)$ から $(0,l)$ への道が定まる. このとき,

$$L(K) := |l|$$

と定める.

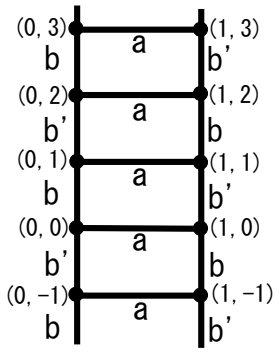
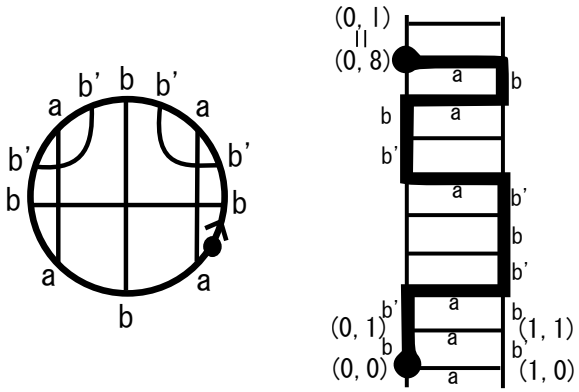


図 7:ケーリーグラフ G_c

命題 2.1 $L(K)$ は well-defined である. すなわち, K の chord diagram や circle の基点と向きの選び方によらず, $L(K)$ は一意に定まる.

例 2.1 図 8 の chord diagram で表される free knot K に対して, $L(K) = 8$ である.



$$w = b\,b'\,a\,b'\,b\,b'\,a\,b'\,b\,a\,b\,a$$
$$= (bb')^4 \in G$$
$$L(K)=2\cdot|4|=8.$$

図 8: $L(K)$

この不変量 $L(K)$ について, 次が簡単に証明できる.

命題 2.2 ([4]) 任意の free knot K に対し, $L(K) \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\ 4)$.

更に, 次の結果を得ることができた.

定理 2.1 任意の free knot K に対し, $L(K) \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\ 8)$.

実際, 交点数が 6 以下で $L(K) = 8$ となる free knot は, 5.2, 6.4, 6.5, 6.6, 6.7 の 5 つのみである. 他の free knot については $L(K) = 0$ である.

ここで, 定理を示すために, 次の補題を用いた.

補題 2.1 K の任意の linked な chord 対して図 9 のように chord を splicing して得られた free knot を K' とする. このとき,

$$L(K) \equiv L(K) \,(\mathrm{mod}\, 8).$$

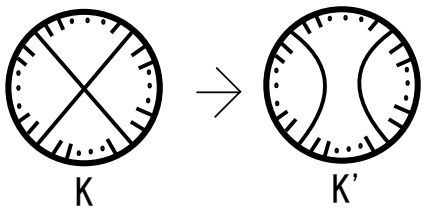


図 9: splicing chords

補題 2.1 の証明の概略

splicing する 2 本の chord の Gaussian justified parity と circle 上の chord の端点の個数により場合分けして考える. 例えば, ともに even で circle 上に図 10 のように chord の端点があるとき, K, K' の chord diagram の circle 上のラベルは同じである. 従って, $L(K) = L(K')$. 他の場合についても全て考えることによって, 補題 2.1 が証明できる. ■

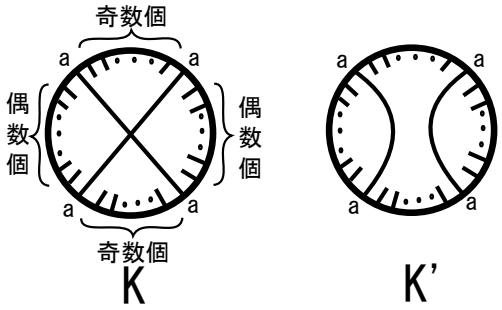


図 10: 補題 2.1 の証明の簡単な場合

定理 2.1 の証明

K の linked な chord の組の数 k に関する帰納法により示す.

$k = 0$ のとき, 全ての chord は even であるので, $L(K)= 0$.

$k \geq 1$ のとき, linked な chord の組の数が $k-1$ 以下の chord diagram で表される free knot に対して, $L(K)\equiv 0 \pmod 8$ が成り立つと仮定する. 任意に K の linked な chord の組を 1 つ選び, それらに対して chord を splicing することで K' を得る. このとき, 補題 2.1 より $L(K) \equiv L(K') \pmod 8$ が成り立つ. また, K' の linked な chord の組の数は k よりも少なくとも 1 は少ないので, 帰納法の仮定から $L(K')\equiv 0 \pmod 8$. よって, $L(K) \equiv 0 \pmod 8$. ■

参考文献

[1] A. Gibson, it Homotopy invariants of Gauss wards, Math. Ann. 349 (4) (2011) 871-887

[2] V. O. Manturov, *On free knots*, ArXiv:0901.2214

[3] V. O. Manturov, *On free knots and lnks*, arXiv:0902.0127

[4] V. O. Manturov, *Parity and Cobordisms of Free Knots*, arXiv:1001.2827