

On classification of two-point homogeneous quandles of cyclic type

和田 幸史朗 (広島大学 大学院理学研究科数学専攻 博士課程前期 2 年)

概要

本研究は Riemann 多様体論からのカンドルへのアプローチを研究することを目的としている. Riemann 多様体論における 2 点等質という概念のアナロジーとして, 2 点等質カンドルと呼ばれるカンドルが定義される. またその特別なケースである巡回型と呼ばれるカンドルが存在する. ここでは, まず 2 点等質カンドルと巡回型カンドルとの関係をいくつか述べ, 巡回型カンドルの分類定理と位数 12 までの分類結果を紹介する. 尚, 本研究は広島大学の田丸博士先生との共同研究である.

1 背景と定義

Riemann 多様体とは可微分多様体 M に Riemann 計量と呼ばれるある計量 g をいれた多様体 (M, g) のことである (ここでは Riemann 多様体は連結であることを仮定する). この計量によって距離関数 d が与えられ, Riemann 対称空間という多様体が定義される. また別に 2 点等質 Riemann 多様体と呼ばれるものを定義する. 以下 (M, g) を Riemann 多様体, $\text{Isom}(M, g)$ を等長変換の成す群とする.

定義 1.1. 任意の $x \in M$ に対し次を満たす等長変換 $s_x : M \rightarrow M$ が存在するとき, (M, g) は Riemann 対称空間であるという.

- (i) x は s_x の孤立固定点である.
- (ii) $s_x^2 = \text{id}_M$

定義 1.2. Riemann 多様体 (M, g) に対し, 次が成り立つ時それは 2 点等質であるという.

$\forall (x_1, x_2), (y_1, y_2) \in M \times M$ ($d(x_1, x_2) = d(y_1, y_2)$), $\exists f \in \text{Isom}(M, g)$ s.t. $f(x_i) = y_i$ ($i = 1, 2$)

2 点等質 Riemann 多様体は Riemann 対称空間であることが知られている. Joyce は [1] において Riemann 対称空間がカンドルであることを述べており, 我々は 2 点等質に相当する概念をカンドルにおいて定義する.

定義 1.3. 集合 X と二項演算 $* : X \rightarrow X \mid (x, y) \mapsto x * y$ の組 $(X, *)$ が次を満たす時 $(X, *)$ はカンドルであるという.

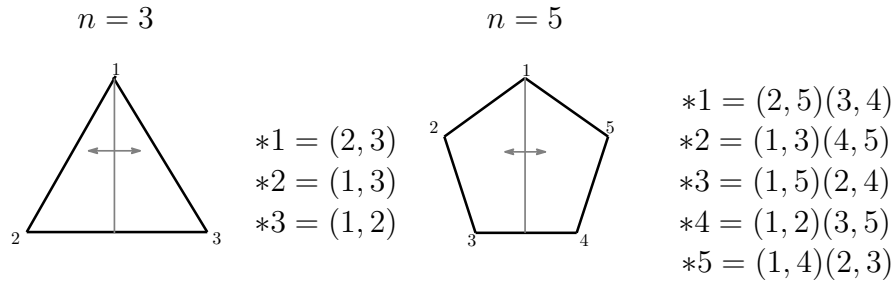
$$\begin{aligned} \forall x \in X, x * x &= x \\ \forall x, y \in X, \exists! z \in X \text{ s.t. } z * x &= y \\ \forall x, y, z \in X, (x * y) * z &= (x * z) * (y * z) \end{aligned}$$

Riemann 対称空間 (M, g) に対し二項演算を $* : M \times M \mid (x, y) \mapsto x * y := s_y(x)$ で定義する. この時 $(M, *)$ はカンドルとなり満たすべき等式は $s_x \circ s_y = s_{s_x(y)} \circ s_x$ である. 以下カンドルを $(X, *)$ として, 2 点等質カンドルを定義する. まず各 $x \in X$ に対し, $*x : X \rightarrow X \mid y \mapsto y * x$ とし, $\text{Inn}(X, *) := \langle *x(x \in X) \rangle$ とする (積は $(*x) \cdot (*y) := *x \circ *y$ とする). また任意の $x \in X$ に対して, $\text{Inn}(X, *)$ の部分群 G_x を $\{f \in \text{Inn}(X, *) \mid f(x) = x\}$ とする.

定義 1.4. 次が $(X, *)$ に対して成立するとき $(X, *)$ は 2 点等質カンドルであるという.

$$\forall (x_1, x_2), (y_1, y_2) \in X \times X \ (x_1 \neq x_2, y_1 \neq y_2), \exists f \in \text{Inn}(X, *) \text{ s.t. } f(x_i) = y_i \ (i = 1, 2)$$

この例として, 位数 3 の二面体カンドルが挙げられる (位数が 4 以上の二面体カンドルの場合は 2 点等質カンドルにはならない). 位数 n の二面体カンドルとは各要素を正 n 角形の各頂点に対応させ, $*x$ を x に対し対称に変換させる作用として二項演算 $*$ を定めたものである (下図は $*1$ の作用).



まとめると以下ようになる.

$$\begin{aligned} & \{ \text{Riemann 対称空間} \} \supset \{ \text{2 点等質 Riemann 多様体} \} \\ & \quad \cap \\ & \{ \text{カンドル} \} \supset \{ \text{2 点等質カンドル} \} \end{aligned}$$

注意 1.1. 2 点等質 Riemann 多様体において f は等長変換全体からとるため, 2 点等質 Riemann 多様体は必ずしも 2 点等質カンドルになるとは限らない.

以下カンドルに関するいくつかの定義を述べる. ここで述べる以外のカンドルに関する基礎的な部分や不変量などについては [3, 4, 5] を参照されたい.

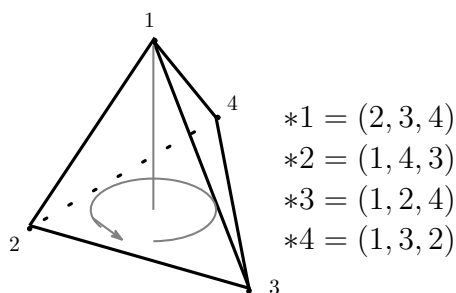
定義 1.5. $(X, *)$, $(X', *)'$ をカンドルとする. 写像 $f: X \rightarrow X'$ が任意の $x, y \in X$ に対し, $f(x * y) = f(x) *' f(y)$ を満たす時, カンドル準同型であるという. また全単射なカンドル準同型が存在する時, 二つのカンドルは同型であるという.

定義 1.6. カンドル $(X, *)$ に対し, 二項演算 $\bar{*}: X \times X \rightarrow X$ を $x \bar{*} y = z$ で定義する. 但し z は $x = z * y$ を満たす元である. $(X, \bar{*})$ はカンドルとなりこれを双対カンドルという.

定義 1.7. カンドル $(X, *)$ に対し, $\text{Inn}(X, *)$ が X に推移的に作用する時 X は連結であるという.

定義 1.8. 位数 $n \geq 3$ のカンドル $(X, *)$ の任意の元 $x \in X$ に対し, $*x$ の $X - \{x\}$ への作用が位数 $n - 1$ の巡回置換として作用するとき, $(X, *)$ は巡回型であるという.

四面体カンドルは巡回型である. これは正四面体の各頂点に元を割り当て, 各々の作用 $*x$ が他の頂点を反時計周りに置換するものとして二項演算を与えたカンドルである (下図は $*1$ の作用).



$$\begin{aligned} *1 &= (2, 3, 4) \\ *2 &= (1, 4, 3) \\ *3 &= (1, 2, 4) \\ *4 &= (1, 3, 2) \end{aligned}$$

2 2点等質カンドルと巡回型カンドル

ここでは2点等質カンドルと巡回型カンドルとの関係を述べる. 定義から直ちに次のことが導かれる.

命題 2.1. 2点等質カンドルは連結である.

命題 2.2. カンドル $(X, *)$ に対し, 2点等質カンドルであることと任意の $x \in X$ に対して, G_x が $X - \{x\}$ に推移的に作用することは同値である.

命題 2.2 から次の命題が成立する.

命題 2.3. 巡回型カンドルは2点等質カンドルである.

逆が成立するかどうかはまだ一般には知られていないが, ある仮定を付け加えると成立する. それを以下で述べる.

命題 2.4. 位数 $p + 1$ の2点等質カンドルは巡回型カンドルである. ここで p は素数とする.

証明 $x \in X \subset \text{Inn}(X, *)$ に対し, $\langle *x \rangle$ による $X - \{x\}$ の軌道分解を施すと,

$$X - \{x\} = \coprod_{i=1}^m \langle *x \rangle \cdot y_i$$

となる. よって $m = 1$ を示せばよい.

まず $f \in G_x$ に対して, $f \circ (*x) = (*x) \circ f$ が成立する. よって各軌道 $\langle *x \rangle \cdot y_i$ と $f \in G_x$ について $f(\langle *x \rangle \cdot y_i) = \langle *x \rangle \cdot f(y_i)$ となる. また命題 2.2 から G_x は $X - \{x\}$ に推移的に作用するため, 各軌道は G_x によって移り合い軌道の位数は全て一致する. よって位数に関して $\#(X - \{x\}) = m\#(\langle *x \rangle \cdot y_1) = p$ が成立する. 一般の連結なカンドルに対し各 $*x$ は恒等写像とならないことが知られているため, 命題 2.1 より $*x \neq \text{id}$ となり, $\#(\langle *x \rangle \cdot y_1) \neq 1$ が成り立つ. 今 p は素数なのでこれらのことから $m = 1$ となる. $\square$

これらの命題から次の問題が考えられる.

問題: 全ての2点等質カンドルは巡回型か?

この問題は [2] において位数が素数の場合に解決されている. その場合2点等質カンドル

は必ず存在し、全て巡回型となる (ある種の線型アレクサンダーカンドルで具体的に与えられる).

3 巡回型カンドルの分類

この章では、巡回型カンドルの分類定理と位数が 12 までの分類結果を紹介する.

A_n を位数 n の巡回型カンドルの同型類の集合とする. S_n を n 次対称群, また s_1 を $(2, \dots, n) \in S_n$ なる $n-1$ 次巡回置換とする. 次の条件を満たす $n-1$ 次巡回置換 s の集合を D_n と置く.

1. $s(2) = 2$
2. $\{s^m s_1 s^{-m} \mid m = 1, 2, \dots, n-2\} = \{s_1^m s s_1^{-m} \mid m = 1, 2, \dots, n-2\}$
3. s は $n-1$ 次巡回置換である.

定理 3.1. (Tamaru)

A_n と D_n は一対一に対応する.

また D_n から対応する巡回型カンドルを簡単に構成することができる.

以下に巡回型カンドルの D_n による分類表を与える.

n	D_n
3	$\{(1, 3)\}$
4	$\{(1, 4, 3)\}$
5	$\{(1, 3, 5, 4), (1, 4, 3, 5)\}$
6	$\emptyset$
7	$\{(1, 7, 4, 6, 5, 3), (1, 7, 5, 4, 6, 3)\}$
8	$\{(1, 5, 8, 3, 7, 6, 4), (1, 7, 5, 4, 8, 3, 6)\}$
9	$\{(1, 4, 3, 8, 6, 9, 5, 7), (1, 5, 7, 3, 6, 4, 9, 8)\}$
10	$\emptyset$
11	$\{(1, 3, 6, 8, 4, 11, 5, 10, 9, 7), (1, 4, 3, 7, 10, 5, 11, 9, 6, 8),$ $(1, 6, 8, 5, 3, 9, 4, 7, 11, 10), (1, 7, 5, 4, 9, 3, 10, 6, 8, 11)\}$
12	$\emptyset$

巡回型の定義からすぐに分かるように、それらの双対もまた巡回型になる. この表においては $n = 3, 4$ の場合を除いて、自己双対となる巡回型カンドルは存在しないことが分かっている.

参考文献

- [1] D. Joyce, *A classification invariant of knots, the knot quandle*, J. Pure Appl. Algebra **23** (1982) 37–65.

- [2] H. Tamaru, *Two-point homogeneous quandles with prime cardinality*, preprint.
- [3] R. Fenn, C. Rourke, *Racks and links in codimension two*, J. Knot Theory Ramifications, **10** (1992) 343–406.
- [4] S. Kamada, K. Oshiro, *Homology groups of symmetric quandles and cocycle invariants of links and surface-links*, Amer. Math. Soc. **362** (2010), 5501–5527.
- [5] J. S. Carter, D. Jelsovsky, S. Kamada, L. Langford, M. Saito, *Quandle cohomology and state-sum invariants of knotted curves and surfaces*, Trans. Amer. Math. Soc. **355** (2003) 3947–3989.