

双曲的結び目の例外的デーン手術スロープ集合と最短スロープ
SHORTEST SLOPES AND EXCEPTIONAL SURGERY SLOPE SETS FOR
HYPERBOLIC KNOTS

市原 一裕 (KAZUHIRO ICHIHARA)

ABSTRACT. 双曲的結び目に沿った例外的デーン手術について、その全ての手術スロープと距離が2以下となるスロープの存在が、Gabai-Mosherによって、また後に Calegariによって、示されている。本稿では、一般的と思われる状況において、そのようなスロープとして、双曲的結び目補空間内のホロトールス上の最短測地線が代表するスロープがとれることを報告する。

本稿は、主には次の論文の内容紹介を目的としています。

On the maximal number and the diameter of exceptional surgery slope sets

プレプリント [11] (arXiv:1110.0572), 日本大学文理学部自然科学研究所研究紀要に掲載予定

より具体的には、2007年に開催された2つの研究集会

・「Intelligence of Low Dimensional Topology 兼拡大K O O Kセミナー」

・「Knotting Mathematics and Art: Conference in Low Dimensional Topology and Mathematical Art」

での発表内容および報告集原稿 [8] について、一部に間違いが見つかったので、その訂正を行うことが目的です。

まず具体的な内容の前に、研究背景と動機（大学院生向け）、これまでに知られている結果、および、これまでの経緯を説明します。

まず**3次元多様体** (3-dimensional manifold (3-manifold と略記)) とは、大雑把に言って、局所的に3次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^3$ と同一視できる空間のことでした。これは、2次元多様体である曲面の直接の拡張として、また、私たちが住むこの宇宙のモデルとして、非常に興味深い研究対象であり、実際、19世紀末のポアンカレによる位相幾何学の創始より研究が進められてきたものです。

その研究の中でも、1904年に提起されたポアンカレ予想 [23] は、以後の3次元多様体研究の牽引役として、主導的な役割を果たしてきました。1970年代後半には、W.Thurstonにより、いわゆる幾何化予想 (Geometrization Conjecture) [27, Conjecture 1.1] (詳しくは例えば [25] を参照) として拡張され、ついに、Perelmanにより、2002~2003年に証明が与えられました [20, 21, 22]。

その一つの帰結として、例えば、次のような3次元多様体の分類定理が得られました。

分類定理: 任意の向き付け可能な閉3次元多様体は、次のいずれかになる。

- ・可約 (本質的球面を含む)
- ・トロイダル (本質的トーラスを含む)
- ・ザイフェルト (S^1 による葉層構造を許容)
- ・双曲的 (定曲率 -1 のリーマン計量を許容)

2000 *Mathematics Subject Classification*. Primary 57M50; Secondary 57M25.

Key words and phrases. 例外的デーン手術, 最短スロープ.

研究集会 “結び目の数学 IV” (2011.12.23–26, 東京女子大学) 報告集原稿. .

The author is partially supported by Grant-in-Aid for Young Scientists (B), No. 23740061, Ministry of Education, Culture, Sports, Science and Technology, Japan.

このような分類定理が得られた後の3次元多様体研究に関して、私見ですが、次のような方向性が考えられると思います。

- 未解決問題 に挑戦. (e.g., 仮想ハーケン予想 [12, Problem 3.2], etc ...)
- 幾何的 & 位相的 不変量の関連づけ. (e.g., 体積予想, etc ...)
- 3次元多様体間の 関係 の研究. (e.g., デーン手術, etc ...)

本稿で取り扱うのは、この最後の方向性における、**デーン手術** (Dehn surgery) と呼ばれる、3次元多様体どうしを関係づける次のような操作です。

向きづけられた閉3次元多様体 M 内の結び目 K に対して、

- 1) M から K の閉管状近傍 $N(K)$ の内部を引き抜く
- 2) ソリッド・トーラスを (スロープ γ に沿って) 埋め戻す
(ただし”スロープ γ に沿って”という部分は、後で説明します。)

このデーン手術は、1910年に Dehn により導入 [7] され、3次元多様体間の関係を記述する上で、これまで非常に重要な役割を果たして来ました。特に、Wallace (1960 [29]) と Lickorish (1962 [15]) によって独立に証明された、次の定理は基本的です。

定理. 任意の2つの向き付け可能閉3次元多様体どうしは、有限回のデーン手術で移り合う。

これにより、3次元多様体の集合に「構造」を入れられることになり、さまざまな研究が行われてきました。しかし、実際のところ、現時点でも、その大域的な研究は、まだ未発展な部分が多く残っています。一方で、その局所的な研究は、次に述べる 例外的デーン手術 の研究として、非常に盛んに研究され、多くの結果が得られてきています。

ここで例外的デーン手術の説明の前に、デーン手術のパラメータ付け (手術スロープ) について触れておきます (詳しくは例えば [24] を参照)。

結び目 K に沿ったデーン手術で得られる多様体の同相類は、 $\gamma = [f(V \text{ のメリディアン})]$ で定まる $\partial N(K)$ 上のスロープ (閉曲線のイソトピー類) で決まります。ここで、 V はデーン手術で貼り合わされるソリッドトーラス、 f は ∂V から $\partial N(K)$ への貼り合わせ同相写像。このスロープ γ を、その手術の**手術スロープ**と呼びます。さらに、 K が3次元球面 S^3 内の結び目の場合、標準的なメリディアン・ロンジチュード系を用いて、そのようなスロープの集合は有理数の集合 $\mathbb{Q}$ および $\{1/0\}$ と同一視されます。

またスロープ γ, γ' の距離 $\Delta(\gamma_1, \gamma_2)$ を、それらの代表元どうしの最小交差数と定義します。さらに、上記のようにスロープを有理数と同一視したとき、スロープ $\frac{a}{b}$ と $\frac{c}{d}$ との距離は $\Delta(\frac{a}{b}, \frac{c}{d}) = |ad - bc|$ と計算されます。

さて例外的デーン手術の説明をします。前述の3次元多様体の分類定理と同様に、結び目の外部空間 (結び目の開管状近傍の補空間) も、「可約・トロイダル・ザイフェルト・双曲的」の4種類に分類されます。3次元球面内の結び目については、外部空間は常に既約であることがわかり、さらに、次の対応関係が知られています。

トロイダル $\Leftrightarrow$ サテライト結び目	ザイフェルト $\Leftrightarrow$ トーラス結び目	双曲的 $\Leftrightarrow$ それ以外 (双曲的結び目)
----------------------------------	----------------------------------	--

このような分類とデーン手術に関して、経験的に

「結び目外部空間の構造がデーン手術後にも生き残る」

ことが知られています。実際、W.Thurston により、次の定理が示されました。

定理 (双曲デーン手術定理 [Thurston, [26, Theorem 5.8.2]]). 双曲的結び目に沿ったデーン手術は **有限個の例外** を除いて双曲的多様体を生成する。

これにより、非双曲的多様体を生成する双曲的結び目に沿ったデー手術は、**例外的デー手術**と呼ばれ、その分類や決定に関して、1980年代より非常に多くの研究がなされてきたのです。

さて双曲デー手術定理より、与えられた双曲的結び目に対して、例外的デー手術は有限個しかないわけですが、それが実際にどのくらいあるか、が自然な問題として考えられます。

問題. 双曲的結び目は例外的デー手術を最大いくつ持つか？

この問題に対して、例外的デー手術研究を主導的に推進してきた C.McA.Gordon により、次の予想が提起されました。

予想 (Gordon [12, Problem 1.77(B)]). どんな双曲的結び目も、ただか **10** 個の例外的デー手術しか持たないだろう。

この予想に関して様々な研究がなされていましたが、一つの大きな結果として、2000年に Agol [5] と Lackenby [13] が、それぞれ独立に次を示しました。

定理. どんな双曲的結び目も、ただか **12** 個の例外的デー手術しか持たない。

ただし、2000年時点では幾何化予想が未解決であり、その後の Perelman の結果とあわせて初めて、上記の定理の証明は完結したことになることに注意してください。

ここから、上記の予想に向けて、筆者のこれまで (2007年の発表までの) 研究の経緯を説明します。以下、 K を双曲的結び目とし、 $\mathcal{E}(K)$ で K に沿った例外的手術スロープの集合とします (これは $\mathbb{Q}$ の有限部分集合だと見なされます)。さらに、 $\mathcal{E}(K)$ の要素の個数を $\sharp\mathcal{E}(K)$ で表すことにします。まず、2004年に次の結果を得ました (雑誌掲載は 2008年)。

定理 1 (市原 [9]). 双曲的結び目 K に対して、あるスロープ γ_0 が存在して、任意の $\gamma \in \mathcal{E}(K)$ に対して $\Delta(\gamma_0, \gamma) \leq 1$ となるならば、 $\sharp\mathcal{E}(K) \leq 10$ が成り立つ。

この定理の証明の鍵となっているのは、Agol [5] と Lackenby [13] による「6-定理」と呼ばれる例外的デー手術スロープの「長さ」の評価式と、Adams [2, 3] による 最短スロープの長さ の評価式 (Adams によるサーベイ [4] も参照) でした。

さらに、定理 1 の応用として、Lackenby [13] の議論を基に、2006年に次の結果を得ました (やはり雑誌掲載は 2008年)。

定理 2 (市原 [10]). 双曲交代結び目 K について、 $\sharp\mathcal{E}(K) \leq 10$ がいつでも成り立つ。

次に定理 1 の拡張に向けて考えを進めました。実際、 $\Delta(\gamma_0, \gamma) \leq 1$ となるようなスロープ γ_0 がとれないような例があることは知られていました。例えば、有名な $(-2, 3, 7)$ -プレッツェル結び目は、次のような 7 個の例外的手術を持ちます (例えば [12, Problem 1.77(A) 6] を参照)。

$$\mathcal{E}(K) = \left\{ \frac{1}{0}, \frac{16}{1}, \frac{17}{1}, \frac{18}{1}, \frac{37}{2}, \frac{19}{1}, \frac{20}{1} \right\}$$

この集合に対して上記のようなスロープ γ_0 がとれないことは、直接計算により確認できます。

しかし、実は次が知られていました。

定理 ([Gabai-Mosher], [Calegari]). 任意の双曲的結び目 K について、あるスロープ γ_0 が存在して、任意の $\gamma \in \mathcal{E}(K)$ に対して、 $\Delta(\gamma_0, \gamma) \leq 2$ が成り立つ。

この定理は、正確には Wu による結果 [30, Theorem 2.5] と、Gabai-Mosher による未発表の結果に、Perelman による幾何化予想の解決をあわせることにより得られます。(Gabai-Mosher による結果の証明の一部は、Mosher のモノグラフ [18] (ホームページのみで公開))。なお、Gabai-Mosher の定理の別証明は、Calegari によって独立に得られています [6, Theorem 6.48]。

ここで、上記の Gabai-Mosher, Calegari の結果は、葉層構造の理論を用いる非常に深い結果です。特に上記定理に述べられているスロープは、結び目外部空間内の本質的箔層 (essential lamination) から構成されるもの (非退化スロープ (degeneracy slope) と呼ばれる) であり、実際に計算することは非常に難しいことに注意してください。

一方で、Gordon により次のことも予想されていました。

予想 (Gordon, [12, Problem 1.77(B)]). 任意の双曲結び目 K について、 $\Delta\mathcal{E}(K) = \max\{\Delta(\gamma, \gamma') \mid \gamma, \gamma' \in \mathcal{E}(K)\}$ ($\mathcal{E}(K)$ の直径 (diameter) と呼ばれる) としたとき、 $\Delta\mathcal{E}(K) \leq 8$ がいつでも成り立つ。

ここで、上記定理を用いることにより、2007 年に次が成り立つことに気がつきました。

定理 3 (市原). $\Delta\mathcal{E}(K) \leq 8$ ならば $\sharp\mathcal{E}(K) \leq 10$ が成り立つ。

この証明は初等的なものです。興味があれば [11] をご覧ください。

また、この定理は実際、非自明なものです。例えば、

$$\left\{ \frac{1}{0}, \frac{0}{1}, \frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{3}{1}, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{3}, \frac{5}{4}, \frac{7}{4}, \frac{7}{5}, \frac{8}{5} \right\}$$

というスロープの集合を考えると、 $\Delta \leq 8$ であるが $\sharp\mathcal{E}(K) = 12$ が成り立っています。つまり、例外的デーネン手術スロープという仮定は外せないことがわかります (このことは例えば [14, Section 2] にも注意されています)。

あとは $\Delta\mathcal{E}(K)$ の評価ができれば良いことになるわけです。

さらに (2007 年頃に) 続いて考えたことを説明します。定理 1 の証明で鍵となったのは、結び目補空間の双曲構造の解析でした。そこで、Gabai-Mosher, Calegari の定理を、双曲構造 を用いて証明できないか? と考えました。

この考えのもとに得られた (と思った (後述)) のが、次の結果です。

”定理” 4 (市原 (2007 年)). 任意の双曲結び目 K において、その補空間内のホロトラス上の最短スロープに対応するスロープ γ_0 は、任意の $\gamma \in \mathcal{E}(K)$ に対して、 $\Delta(\gamma_0, \gamma) \leq 2$ を満たす。

以下、上記定理に使われている用語の説明をします (双曲幾何についての基本的な用語などは、例えば [28] を参照してください)。

K を 3 次元多様体 M 内の双曲的結び目とします。このとき K の補空間 C_K の普遍被覆空間は、双曲 3 次元空間 $\mathbb{H}^3$ と同一視されます。被覆射影によって、共通部分のないホロ球たちを囲む $\mathbb{H}^3$ 内のホロ球面の同変族は、 C_K に埋め込まれたトーラス T を与えます。このトーラスを **ホロトーラス** と言います。このホロトーラス上には、 C_K 上の双曲計量の制限として、ユークリッド計量が入ることが知られています (例えば [26] を参照)。従ってこの計量を用いて、 T 上の曲線の長さを定義することが出来るわけです。また、被覆射影によるホロ球の像は位相的に $T \times [0, \infty)$ であることから、この T は K の周辺トーラス $\partial N(K)$ と同一視できます。以上より、 K の周辺トーラス上のスロープ γ に関して、 T に関する γ の **長さ** を、 r に対応する T 上のスロープを代表する T 上の閉曲線の最長と定義します。

ところが、その後、2008 年の夏に次の定理が発表されました。

定理 (Lackenby-Meyerhoff [14, Theorems 1.1 and 1.2]). 一般に *Gordon* 予想は正しい. つまり, 任意の双曲的結び目 K について, $\Delta\mathcal{E}(K) \leq 8$ と $\sharp\mathcal{E}(K) \leq 10$ が成り立つ.

これで例外的デーネ手術スロープ集合の最大個数と最大直径に関しては、完全に解決したことになります. ただし、いくつか個人的には気になることがありました.

まずひとつは、この結果の証明は部分的にコンピュータ援用のものであるということです. もちろんコンピュータを用いても、数学的に厳密であれば問題ない訳ですが、少なくとも僕には、いくつかの箇所では証明を完全に追うことができませんでした.

それから、 $\Delta\mathcal{E}(K) \leq 8$ と $\sharp\mathcal{E}(K) \leq 10$ を、それぞれ 独立に 証明していることも気になりました. 定理 3 により、直径の評価は最大個数の評価を導くので、もうすこしショートカットするような証明があっても良いように思われたのです.

これらのことから、正直、今でも上記の結果の別証明が得られないか、と模索しています...

さてここから、今回の発表の主題に入ります (長すぎる前置きとなってしまったかもしれませんが).

これまで述べてきたような内容について、2007 年に前述の二つの研究集会で発表させていただきました. しかしその後、2008 年に Lackenby-Meyerhoff の論文が発表され、定理 3 と "定理"4 については、論文としてまとめないまま、時間が過ぎてしまいました.

それらについて、今年度になり機会があったので、大学の紀要への投稿を目指し、夏休みに論文としてまとめおしました. その後、10 月にプレプリントとして arXiv に投稿したところ、D.Futer により、"定理"4 の証明にギャップがあるとの指摘を受けたのです.

確認したところ、たしかに証明中に問題があり、そのままの形では成り立たないことがわかりました. その後、修正を試みたのですが、残念ながら成功せず、しかたなく技術的な仮定を付けた弱い形にせざるを得ませんでした. それが次の定理です.

定理 5 (市原, 2011). もし双曲的結び目補空間が 面積が $8/\sqrt{3}$ より大きいホロトーラスを含む とき、その補空間内のホロトーラス上の最短スロープに対応するスロープ γ_0 は、任意の $\gamma \in \mathcal{E}(K)$ に対して、 $\Delta(\gamma_0, \gamma) \leq 2$ を満たす.

不幸中の幸いとして、上記の「面積が $8/\sqrt{3}$ より大きいホロトーラスを含む」という技術的な仮定は、ある意味で一般的に成り立つと期待されるものと思われます.

というのは、R.Meyerhoff が、Gabai-Meyerhoff-N.Thurston の現在進行形の共同研究として、極大ホロトーラスの面積 < 5.2 となる双曲多様体の決定に向けた研究について、2011 年 6 月に研究発表に行っていました [17]. そのスライドの中では、そのような多様体たちは、ある特殊な 2 つの 2 成分の絡み目補空間から、1 つの成分でのデーネ手術によって得られるだろう、と予想されているのです. もしこの予想が正しければ、 $8/\sqrt{3} < 4.62$ であることから、定理 5 の仮定を満たさない多様体は、特殊な 2 系列のみであることになるわけです.

最後に定理 5 の証明の概略を与え、そのなかで"定理"4 でのギャップに関しても説明しようと思います.

まず K を 3 次元多様体 M 内の双曲的結び目とし、その補空間内のホロトーラスを T とします. また T 上の最短スロープを γ とし、その長さを h とします.

次に、 γ を代表する T 上の最短測地線の上に端点を持ち、 γ にホモトピックでない線分の T 上での最短長を w とします.

このとき, T 上のスロープ γ' の長さは, $w\Delta(\gamma, \gamma')$ 以上であることがわかります (例えば [9] を参照).

一方で, Perelman [20, 21, 22] の幾何化予想の解決の基に, Agol [5] と Lackenby [13] の "6-定理" を用いると, 例外的デーヌ手術スロープの長さは 6 以下であることがわかります.

従って, 定理 5 を証明するためには, $w > 2$ を示せば良いことになります.

以前, "定理" 4 の証明でギャップがあったのは, この証明の部分でした. 具体的には, Adams [2, 3] による h の評価を基に, h と w に関する [1] の結果を使えば良い, と考えていたのですが, 実際には [1] の議論を読み間違えており, 適用できなかったのでした.

ここで「 T の面積が $8/\sqrt{3}$ より大きい」と仮定します.

T の面積は hw で与えられることから, このときもし $h \leq 4/\sqrt{3}$ であれば, $w > 2$ が直ちに従います.

一方, $h < 4/\sqrt{3}$ の場合, 実は [16, Proof of Theorem, page 1049-1050] において, $w \geq h\sqrt{3}/2$ が成り立つことが示されていたのです. 従って $h < 4/\sqrt{3}$ のとき, $w \geq h\sqrt{3}/2 > 2$ となり, 証明が完了します.

REFERENCES

1. C.C. Adams, *The noncompact hyperbolic 3-manifold of minimal volume*, Proc. Amer. Math. Soc. 100 (1987), 601–606.
2. C.C. Adams, *Waist size for cusps in hyperbolic 3-manifolds*, Topology 41 (2002), 257–270.
3. C.C. Adams, *Waist size for hyperbolic 3-manifolds II*, preprint (2000).
4. C.C. Adams, *Hyperbolic Knots*, in; Handbook of knot theory, eds. W. Menasco et al., (Elsevier, Amsterdam, 2005), pp. 1–18.
5. I. Agol, *Bounds on exceptional Dehn filling*, Geom. Topol. 4 (2000), 431–449.
6. D. Calegari, *Foliations and the geometry of 3-manifolds*, Oxford Mathematical Monographs; Oxford Science Publications. Oxford: Oxford University Press., 2007.
7. M. Dehn, *Über die Topologie des dreidimensionalen Raumes*, Math. Ann. 69 (1910), 137–168.
8. K. Ichihara, *On the maximal number of exceptional surgeries*, Proceeding of "Intelligence of Low Dimensional Topology and Extended KOOK Seminar" (2007.8.29–9.1, Osaka City University).
9. K. Ichihara, *Integral non-hyperbolic surgeries*, J. Knot Theory Ramifications 17 (2008), no.3, 257–261.
10. K. Ichihara, *All exceptional surgeries on alternating knots are integral surgeries*, Algebr. Geom. Topol. 8 (2008), 2161–2173.
11. K. Ichihara, *On the maximal number and the diameter of exceptional surgery slope sets*, to appear in Proceedings of the Institute of Natural Sciences, Nihon University, (日本大学文理学部自然科学研究所研究紀要) 47 (2012). Preprint version available at arXiv:1110.0572.
12. R. Kirby, *Problems in low-dimensional topology*, Geometric topology, AMS/IP Stud. Adv. Math., 2.2, (Athens, GA, 1993), (Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1997), 35–473.
13. M. Lackenby, *Word hyperbolic Dehn surgery*, Invent. Math. 140 (2000), no.2, 243–282.
14. M. Lackenby and R. Meyerhoff, *The maximal number of exceptional Dehn surgeries*, preprint available at arXiv:0808.1176.
15. W.B.R. Lickorish, *A presentation of orientable combinatorial 3-manifolds*, Ann. of Math. (2) 76 (1962), 531–540.
16. R. Meyerhoff, *A lower bound for the volume of hyperbolic 3-manifolds*, Canad. J. Math. 39 (1987), 1038–1056.
17. R. Meyerhoff, *The Quest for the First Volume String*, the talk given in the conference "Faces of Geometry: 3-manifolds, Groups & Singularities -A Conference in Honor of Walter Neumann-". Slides: Meyerhoff-Walterfest.pdf, downloadable at <http://math.columbia.edu/walterfest/program.html>
18. L. Mosher, *Laminations and flows transverse to finite depth foliations. Part i: branched surfaces and dynamics*, preprint available at <http://andromeda.rutgers.edu/mosher/>

19. H. Murakami and J. Murakami, *The colored Jones polynomials and the simplicial volume of a knot*, Acta Mathematica 186 (2001), no.1, 85–104.
20. G. Perelman, *The entropy formula for the Ricci flow and its geometric applications*, preprint available at arXiv:math.DG/0211159.
21. G. Perelman, *Ricci flow with surgery on three-manifolds*, preprint available at arXiv:math.DG/0303109.
22. G. Perelman, *Finite extinction time for the solutions to the Ricci flow on certain three-manifolds*, preprint available at arXiv:math.DG/0307245.
23. H. Poincaré, *Cinquième complément à l'analysis situs*, Rend. Circ. Mat. Palermo 18 (1904), 45–110. Reprinted in Oeuvres, Tome VI. Paris, 1953, p. 498.
24. D. Rolfsen, *Knots and Links*, Publish or Perish, Berkeley, Ca, 1976.
25. P. Scott, *The geometries of 3-manifolds*, Bull. Lond. Math. Soc. 15 (1983), 401–487.
26. W.P. Thurston, *The geometry and topology of three-manifolds*, notes, Princeton University, Princeton, 1980; available at <http://msri.org/publications/books/gt3m>
27. W.P. Thurston, *Three dimensional manifolds, Kleinian groups and hyperbolic geometry*, Bull. Amer. Math. Soc. 6 (1982), 357–381.
28. W.P. サーストン (著者), S. レヴィ (編集), 小島定吉 (翻訳), 3次元幾何学とトポロジー, 培風館, 1999.
29. A.H. Wallace, *Modifications and cobounding manifolds*, Canad. J. Math. 12 (1960), 503–528.
30. Y.-Q. Wu, *Sutured manifold hierarchies, essential laminations, and Dehn surgery*, J. Differential Geom. 48 (1998), 407–437.

156–8550 東京都世田谷区桜上水 3–25–40 日本大学文理学部数学科, DEPARTMENT OF MATHEMATICS, COLLEGE OF HUMANITIES AND SCIENCES, NIHON UNIVERSITY, 3-25-40 SAKURAJOSUI, SETAGAYA-KU, TOKYO 156-8550, JAPAN.

E-mail address: ichihara@math.chs.nihon-u.ac.jp