On the Gordian distance by pass moves

山本拓人

神戸大学大学院理学研究科

概 要

Baader や堀内によって示されている、Gordian distance, Gordian distance with Δ moves についての事実の pass move の場合、すなわち以下の命題を示す；

K, K' を Gordian distance by pass moves が 2 であるような結び目とするとき、K とも K' とも Gordian distance by pass moves が 1 であるような結び目が無限個存在する.

この講演では knot と書くとき、それは S^3 内の向き付けられた tame knot であるとする.

1 定義

始めにこの講演で用いる用語のうち主なものを 2 つ定義する.

定義 1 (local move) 図 1 の local move をそれぞれ (1) *crossing change,* (2) Δ *move,* (3) *pass move,* (4) $\sharp$ *move* という.

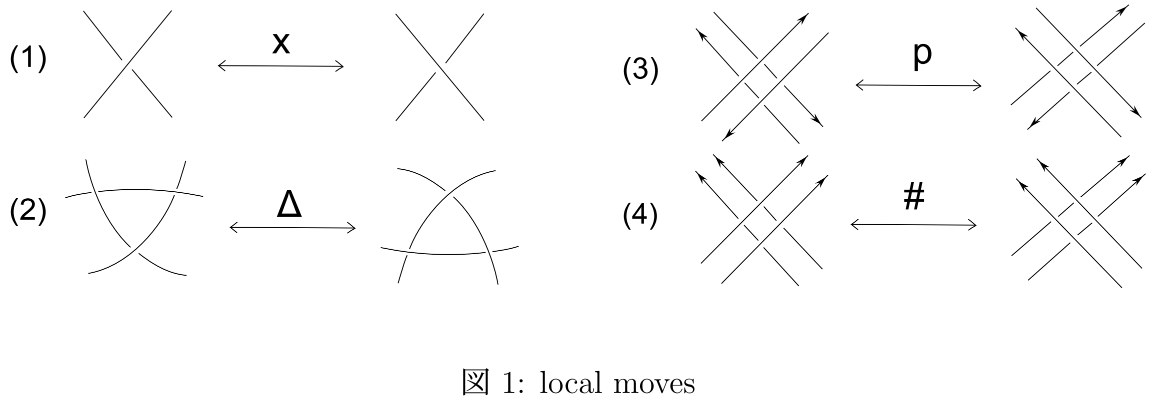

図 1: local moves

定義 2 (Gordian distance) 2 つの knot K_1, K_2 が有限回の crossing change (resp. Δ move, pass move, $\sharp$ move) で移り合うとき、その回数の最少数を K_1 と K_2 の *Gordian distance* (resp. *Gordian distance by* Δ *moves, Gordian distance by pass moves, Gordian distance by* $\sharp$ *moves*) といい、$d_G(K_1, K_2)$ (resp. $d_\Delta(K_1, K_2)$, $d_p(K_1, K_2)$, $d_\sharp(K_1, K_2)$) で表す.

2　先行結果

この講演の主題は pass move に関するものであるので、それについて知られている結果を紹介する. 次の命題は基本的かつ重要なものである.

定理 1 ([3],[4],[5]) 2 つの knot K, K' が有限回の pass move で移り合う必要十分条件は、K, K' のアルフ不変量が一致することである.

また、次の命題は Gordian distance by pass moves を評価する数少ない式の内の 1 つである.

定理 2 ([6]) 2 つの knot K_1, K_2 に対して次が成り立つ.

$$d_p(K_1, K_2) \geq \frac{|\sigma(K_1) - \sigma(K_2)|}{2} .$$

但し、$\sigma(K)$ は K の signature である.

ここで今回の主定理に直接関係する命題を紹介する. Baader さんは次を示した.

定理 3 ([1]) 2 つの knot K_1, K_2 が $d_G(K_1, K_2) = 2$ を満たすとき、互いに異なる無限個の knot J_1, J_2, J_3, $\cdots$ が存在して $d_G(K_1, J_i) = d_G(K_2, J_i) = 1$ $(i = 1, 2, 3, \cdots)$ を満たす.

定理 3 は Gordian distance が 2 である任意の 2 つの knot K_1, K_2 に対して、その "間 "に無限個の互いに異なる knot が存在することを示している. すなわち、K_1 から K_2 に crossing change によって移る経路は無限通りある.

また、堀内さんは定理 3 の Δ move 版である次の命題を示した.

定理 4 ([2]) 2 つの knot K_1, K_2 が $d_\Delta(K_1, K_2) = 2$ を満たすとき、互いに異なる無限個の knot J_1, J_2, J_3, $\cdots$ が存在して $d_\Delta(K_1, J_i) = d_\Delta(K_2, J_i) = 1$ $(i = 1, 2, 3, \cdots)$ を満たす.

3　結果

主定理 1, 2 はそれぞれ、定理 3 の pass move 版と $\sharp$ move 版である. 主定理 3 は K_1 と K_2 の Gordian distance by pass moves が 1 であるところのみ主定理 1 と異なる.

主定理 1 2 つの knot K_1, K_2 が $d_p(K_1, K_2) = 2$ を満たすとき、互いに異なる無限個の knot J_1, J_2, J_3, $\cdots$ が存在して $d_p(K_1, J_i) = d_p(K_2, J_i) = 1$ $(i = 1, 2, 3, \cdots)$ を満たす.

主定理 2 2 つの knot K_1, K_2 が $d_\sharp(K_1, K_2) = 2$ を満たすとき、互いに異なる無限個の knot J_1, J_2, J_3, $\cdots$ が存在して $d_\sharp(K_1, J_i) = d_\sharp(K_2, J_i) = 1$ $(i = 1, 2, 3, \cdots)$ を満たす.

主定理 3 2 つの knot K_1, K_2 が $d_p(K_1, K_2) = 1$ を満たすとき、互いに異なる無限個の knot J_1, J_2, J_3, $\cdots$ が存在して $d_p(K_1, J_i) = d_p(K_2, J_i) = 1$ $(i = 1, 2, 3, \cdots)$ を満たす.

4 証明

ここでは主定理 1 のみ証明する. 主定理 2 の証明はより簡単であり、また主定理 3 は主定理 1 の証明とほとんど同様に示すことができる. まず次の補題を用意する. 証明は省く.

補題 1 2 つの knot K_1, K_2 に対して、K_2 が K_1 から 1 回の pass move で得られるための必要十分条件は、K_2 が $K_1 \amalg L$ から 4 本の band に沿った fusion によって得られることである. 但し $\amalg$ は分離和を表し、また L は図 2 の link とする.

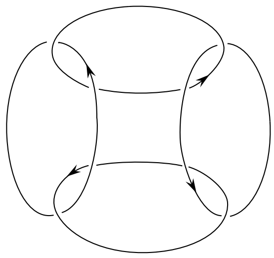

図 2: link L

(主定理 1 の証明) $d_p(K_1, K_2) = 2$ より、ある knot K が存在して $d_p(K_1, K) = d_p(K_2, K) = 1$ を満たす. 補題 1 より、K_1 は $K \amalg L_1$ から 4 本の band b_1, b_2, b_3, b_4 に沿った fusion によって得られる. また、K_2 は $K \amalg L_2$ から 4 本の band b'_1, b'_2, b'_3, b'_4 に沿った fusion によって得られる. ここで L_1, L_2 は link L とする. 次に、$K \amalg L_1 \amalg L_2$ から 8 本の band b_1, b_2, b_3, b_4, b'_1, b'_2, b'_3, b'_4 に沿った fusion によって得られる knot を K' とする. 但し、次の補題 2 のように K' を構成する. 補題 2 の証明は省く.

補題 2 L_1, L_2 の band の足元の K 上での順番が図 3 のようになるように K' を構成できる. すなわち、

- L_1, L_2 の交点の上下はこの通り.
- L_1, L_2 の下から出る band の足元がこの順で隣り合う.
- L_1, L_2 の右から出る band の足元がこの順で隣り合う.

このように構成した K' を使って、新しい knot を構成する. 図 4 の knot を $K(stu)(s't'u')$ $(s, t, u, s', t', u' \in \mathbf{Z} \cup \{\infty\})$ とする. 点線で囲まれた部分の外は K' と同じであり、また変数 s, t, u, s', t', u' は full twist の数を表している. 今から特に $s = -n, t = u = n, s' = -m, t' = u' = m$ $(n, m \in \mathbf{N} \cup \{0\} \cup \{\infty\})$ のとき、つまり $K(-nnn)(-mmm)$ $(n, m \in \mathbf{N} \cup \{0\} \cup \{\infty\})$ について考える. この $K(-nnn)(-mmm)$ は以下を満たす.

$$d_p(K_1, K(-nnn)(-mmm)) = d_p(K_2, K(-nnn)(-mmm)) = 1 \ .$$

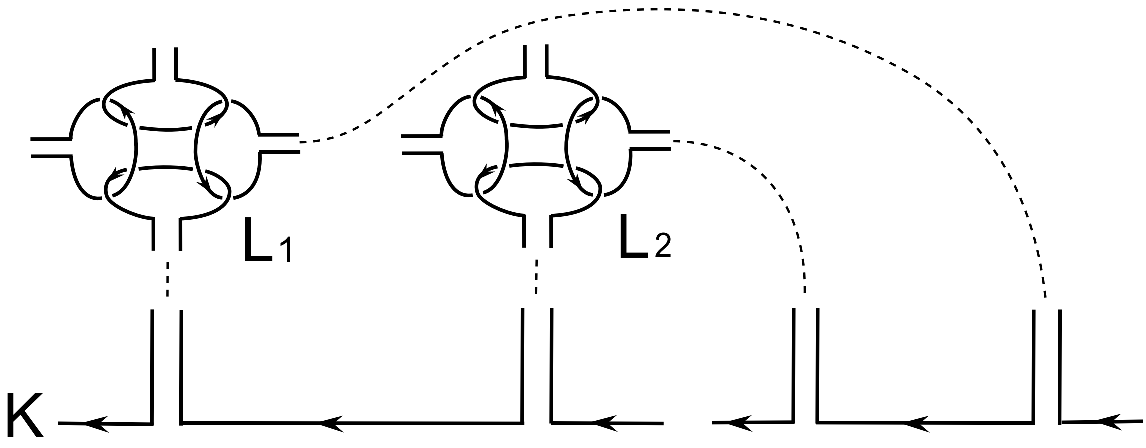

図 3: K'

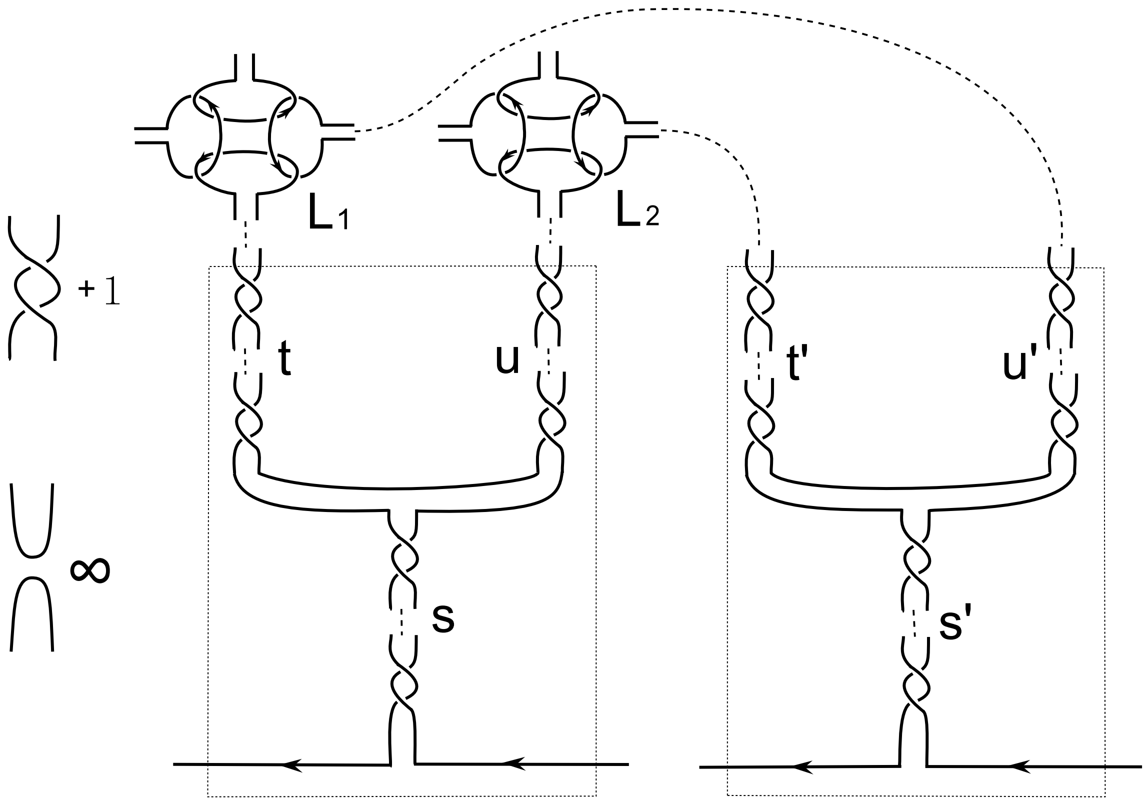

図 4: $K(xyz)(x'y'z')$

[1], [2] と同じ方法で $\{K(-nnn)(-mmm) \mid n,m \in \mathbf{N} \cup \{0\} \cup \{\infty\}\}$ は無限個の互いに異なる knot を含むことを示す. まず、コンウェイ多項式を計算すると次のようになる.

$$
\begin{aligned}
\nabla_{K(-nnn)(-mmm)}(z) &= \boldsymbol{n^2m^2} z^4 \nabla_{K(\infty 0\infty)(\infty 0\infty)}(z) \\
&+ n^2mz^3\nabla_{K(\infty 0\infty)(\infty 00)}(z) - n^2mz^3\nabla_{K(\infty 0\infty)(00\infty)}(z) \\
&- n^2mz^3\nabla_{K(\infty 0\infty)(0\infty 0)}(z) + nm^2z^3\nabla_{K(\infty 00)(\infty 0\infty)}(z) \\
&- nm^2z^3\nabla_{K(00\infty)(\infty 0\infty)}(z) - nm^2z^3\nabla_{K(0\infty 0)(\infty 0\infty)}(z) \\
&- n^2z^2\nabla_{K(\infty 0\infty)(000)}(z) - m^2z^2\nabla_{K(000)(\infty 0\infty)}(z) \\
&+ nmz^2\nabla_{K(\infty 00)(\infty 00)}(z) - nmz^2\nabla_{K(\infty 00)(00\infty)}(z) \\
&- nmz^2\nabla_{K(\infty 00)(0\infty 0)}(z) - nmz^2\nabla_{K(00\infty)(\infty 00)}(z) \\
&+ nmz^2\nabla_{K(00\infty)(00\infty)}(z) + nmz^2\nabla_{K(00\infty)(0\infty 0)}(z) \\
&- nmz^2\nabla_{K(0\infty 0)(\infty 00)}(z) + nmz^2\nabla_{K(0\infty 0)(00\infty)}(z) \\
&+ nmz^2\nabla_{K(0\infty 0)(0\infty 0)}(z) - nz\nabla_{K(\infty 00)(000)}(z) \\
&+ nz\nabla_{K(00\infty)(000)}(z) + nz\nabla_{K(0\infty 0)(000)}(z) \\
&- mz\nabla_{K(000)(\infty 00)}(z) + mz\nabla_{K(000)(00\infty)}(z) \\
&+ mz\nabla_{K(000)(0\infty 0)}(z) + \nabla_{K(000)(000)}(z)
\end{aligned}
$$

この式を変数 n, m に関する多項式と見たとき、次数が最大になる項は一番目の項、すなわち n^2m^2 の項である. よって、多項式全体を n^2m^2 で割って n, m を $+\infty$ に飛ばすと次のようになる.

$$\lim_{n,m\to+\infty} \frac{\nabla_{K(-nnn)(-mmm)}(z)}{n^2m^2} = z^4\nabla_{K(\infty 0\infty)(\infty 0\infty)}(z) \ . \qquad (*)$$

$K(\infty 0\infty)(\infty 0\infty)$ とは図 5 の link である.

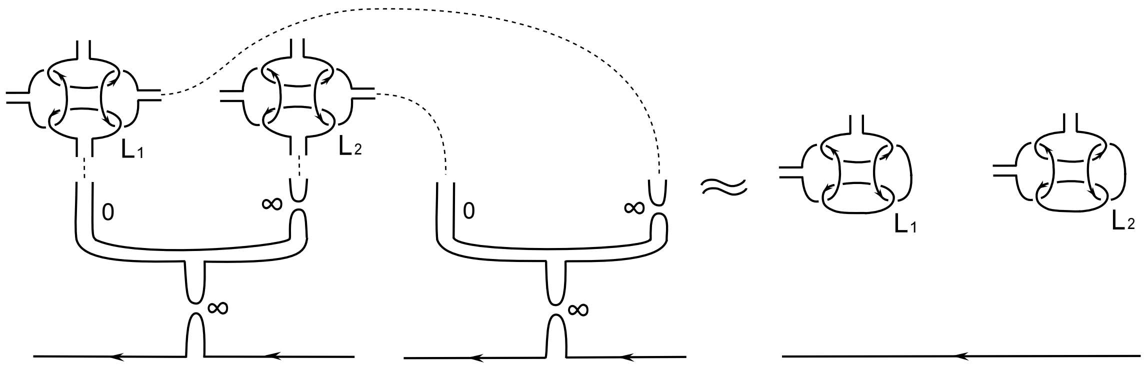

図 5: $K(\infty 0\infty)(\infty 0\infty)$

$\nabla_{K(\infty 0 \infty)(\infty 0 \infty)}(z)$ をさらに計算すると次のようになる.

$$\nabla_{K(\infty 0 \infty)(\infty 0 \infty)}(z) = z^4 \nabla_K(z)\ .$$

K は knot なので、$\nabla_K(z) \neq 0$. よって $(*)$ の右辺は 0 でないので、$\{K(-nnn)(-mmm) \mid n, m \in \mathbf{N} \cup \{0\} \cup \{\infty\}\}$ は無限個の互いに異なる knot を含む. ■

参考文献

[1] S. Baader, Note on crossing changes, Quart. J. Math. **57**(2)(2006), 139-142.

[2] S. Horiuchi, On a ball in a metric space of knots by delta moves, J. Knot Theory Ramif. **17**(6)(2008), 689-696.

[3] L. H. Kauffman, Formal Knot Theory, Math. Notes **30**, Princeton, Princeton Univ. Press, 1983.

[4] L. H. Kauffman and T. F. Banchoff, Immersions and mod-2 quadratic forms, Amer. Math. Month. **84**(1977), 168-185.

[5] M. Yamasaki, On a surface in S^3, in Japanese, 数理解析研究所講究録 **297**(1977), 92-99.

[6] Y. L. Wong, Band-passes and the Arf invariant of a knot, Ph.D. dissertation, University of California, Berkeley, 1988.