

# The Gordian complex of virtual knots

堀内 澄子 (東京女子大学), 古村 香純, 大山 淑之 (東京女子大学), 下澤 昌史

## 概要

Hirasawa-Uchida により, 頂点集合が  $S^3$  内のすべての knot type からなる classical knot の Gordian complex と呼ばれる単体的複体が定義されている. 本稿では, real crossing を virtual crossing に変える local move を用いて, 頂点集合がすべての virtual knot からなる virtual knot の Gordian complex を定義し, 任意に与えた virtual knot  $K_0$  と自然数  $n$  に対し, virtual knot の Gordian distance  $d_v(K_i, K_j) = 1$  ( $i \neq j, i, j = 0, 1, \dots, n$ ) を満たすような virtual knot の族  $\{K_0, K_1, \dots, K_n\}$  が存在することを示した. また, virtual knot の tangle の和における f-polynomial の式も示した.

## 1 Introduction

classical knot  $K$  から  $K'$  へ変形するのに必要な crossing change の最小回数を Gordian distance といい,  $d_G(K, K')$  で表わす.

Hirasawa-Uchida により, 頂点集合が  $S^3$  内のすべての knot type である単体的複体が定義されており, classical knot の Gordian complex と呼ばれる.

**Definition 1.1** [1]. classical knot の Gordian complex  $\mathcal{G}$  とは, 以下において定義される単体的複体のことである.

- (i)  $\mathcal{G}$  の頂点集合は,  $S^3$  内のすべての oriented classical knot type である,
- (ii)  $\mathcal{G}$  の  $n + 1$  個の頂点  $\{K_0, K_1, \dots, K_n\}$  は  $d_G(K_i, K_j) = 1$  ( $i \neq j, i, j = 0, 1, \dots, n$ ) を満たすとき,  $n$  単体を張る, と定義する.

Hirasawa-Uchida により次の定理と系が示されている.

**Theorem 1.2** [1]. Gordian complex の任意の 1 単体  $e$  に対して,  $e$  を部分複体としてもつ無限に高い次元の単体  $\sigma$  が存在する.

**Corollary 1.3** [1]. 任意の classical knot  $K_0$  に対して, Gordian distance  $d_G(K_i, K_j) = 1$  ( $i \neq j$ ) を満たすような無限個の classical knot  $K_0, K_1, K_2, \dots$  が存在する.

virtual knot の Gordian complex について考える.

virtual link diagram とは, real crossing だけでなく Fig. 1 のような virtual crossing ももつような link diagram のことをいう.

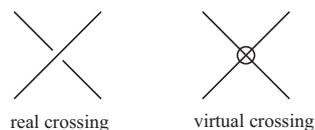


Fig. 1.

virtual link diagram において, 以下の 7 つの move を generalized Reidemeister move と呼ぶ.

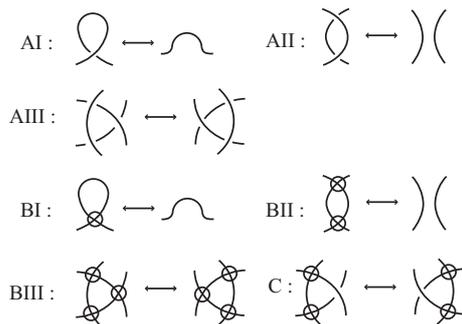


Fig. 2. A generalized Reidemeister move.

2 つの virtual link diagram が同値であるとは, それらが有限回の generalized Reidemeister move により移り合うことである. generalized Reidemeister move が生成する同値関係による virtual link diagram 全体の集合の同値類を virtual link と呼ぶ. 特に, 1 成分のみのときを virtual knot と呼ぶ.

crossing change は virtual knot diagram において unknotting operation ではないことが知られているため, Fig. 3 のような move を用いる. この move は virtual knot diagram において real crossing を virtual crossing に変える local move であり,  $v$ -move と呼ぶことにする.  $v$ -move は virtual knot diagram において unknotting operation である.



Fig. 3. A  $v$ -move.

virtual knot  $K, K'$  に対して,  $K$  から  $K'$  を得るために必要な  $v$ -move の最小回数を  $d_v(K, K')$  と表わすことにする.

classical knot の Gordian complex の概念と同様に,  $v$ -move を用いて virtual knot においても Gordian complex を定義することが出来る.

**Definition 1.4.** virtual knot の Gordian complex  $\mathcal{G}$  とは, 以下において定義される単体的複体のことである.

- (i)  $\mathcal{G}$  の頂点集合は, すべての virtual knot である,
- (ii)  $\mathcal{G}$  の  $n + 1$  個の頂点  $\{K_0, K_1, \dots, K_n\}$  は  $d_v(K_i, K_j) = 1$  ( $i \neq j, i, j = 0, 1, \dots, n$ ) を満たすとき,  $n$  単体を張る, と定義する.

このとき, 次の結果が得られた.

**Theorem 1.5.** virtual knot の Gordian complex の任意の 0 単体  $p$  に対して,  $p$  を部分複体としてもつ無限に高い次元の単体  $\sigma$  が存在する.

**Corollary 1.6.** 任意の virtual knot  $K_0$  に対して, Gordian distance  $d_v(K_i, K_j) = 1$  ( $i \neq j$ ) を満たすような無限個の virtual knot  $K_0, K_1, K_2, \dots$  が存在する.

## 2 The f-polynomial

$L$  を virtual link とし,  $D$  を  $L$  の virtual link diagram とする. Kauffman[2] は virtual link  $L$  の不変量である f-polynomial  $f_L(A)$  を定義した.  $D$  の各々の real crossing を, 向きを忘れて Fig. 4 のように 2 種類の方法で splice する.

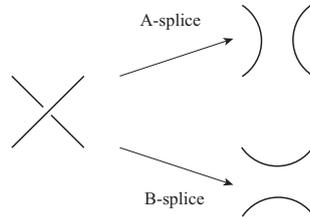


Fig. 4.

$D$  の state とは,  $D$  の各々の real crossing に A-splice か B-splice を施すことによって,  $D$  から得られる virtual link diagram のことをいう.  $D$  の Kauffman bracket polynomial  $\langle D \rangle$  は, 次の式で定義される.

$$\langle D \rangle = \sum_S A^{a(S)-b(S)} (-A^2 - A^{-2})^{\mu(S)-1}.$$

$S$  は  $D$  のすべての state を考える. それぞれの state において,  $a(S)$  は A-splice の個数,  $b(S)$  は B-splice の個数,  $\mu(S)$  は state  $S$  の loop の数を表わす. oriented virtual link diagram  $D$  において,  $D$  の positive crossing の個数から negative crossing の個数を引いたものを writhe といい,  $w(D)$  で表わす.  $D$  の f-polynomial は, 次の式で定義される.

$$f_D(A) = (-A^3)^{-w(D)} \langle D \rangle.$$

$f_D(A)$  は oriented virtual link  $L$  の不変量であるので, 以下  $L$  の f-polynomial を  $f_L(A)$  と表わす.

ここで, tangle を用いた  $f_L(A)$  の計算方法を考える.

辺に向きの付いていない tangle  $T$  と  $S$  を用意する (Fig. 5). tangle 内の crossing は real crossing と virtual crossing, real crossing だけ, virtual crossing だけ, のいずれでも構わない.



Fig. 5.

virtual link diagram の tangle  $T$  の外側のすべての real crossing それぞれに A-splice か B-splice を施すと, trivial component をいくつか持った Fig. 6 のような 3 つのパターン  $N(T)$ ,  $D(T)$ ,  $X(T)$  が得られる.

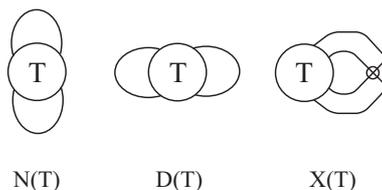


Fig. 6.

tangle  $S$  内のすべての real crossing それぞれに A-splice か B-splice を施し, tangle  $S$  におけるすべての state を考えると, 次の Kauffman bracket polynomial の式が得られる.

$$\langle \text{circle with S} \rangle = f \langle \text{circle with two A-splices} \rangle + g \langle \text{circle with two B-splices} \rangle + h \langle \text{circle with one A and one B splice} \rangle, \quad (1)$$

ここで,  $f, g, h \in \mathbb{Z}[A, A^{-1}]$ .

tangle  $T$  と  $S$  の和を Fig. 7 のように定義する.



Fig. 7 : T+S.

このとき, tangle  $T$  と  $S$  の和の  $N(T+S)$  の Kauffman bracket polynomial は次の式のようになる.

$$\begin{aligned}
\langle N(T+S) \rangle &= \left\langle \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \\ | \quad | \\ \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \end{array} \right\rangle \\
&= f \left\langle \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \\ | \quad | \\ \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \end{array} \right\rangle + g \left\langle \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \\ | \quad | \\ \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \end{array} \right\rangle + h \left\langle \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \\ | \quad | \\ \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \end{array} \right\rangle \\
&= f \langle D(T) \rangle + g \langle N(T) \rangle + h \langle X(T) \rangle. \tag{2}
\end{aligned}$$

式 (1) より, 次の式が得られる.

$$\begin{pmatrix} \langle D(S) \rangle \\ \langle N(S) \rangle \\ \langle X(S) \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu & 1 & 1 \\ 1 & \mu & 1 \\ 1 & 1 & \mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f \\ g \\ h \end{pmatrix}.$$

ここで,  $\mu = -A^2 - A^{-2}$  であり, 行列の成分は  $\mathbb{Q}[A, A^{-1}]$ , つまり,  $\mathbb{Z}[A, A^{-1}]$  の商体とする.

式 (2) と,  $\begin{pmatrix} f \\ g \\ h \end{pmatrix}$  を求めることにより, Lemma 2.1 が得られる.

**Lemma 2.1.**

$$\langle N(T+S) \rangle = \left( \langle D(T) \rangle, \langle N(T) \rangle, \langle X(T) \rangle \right) \mathcal{A} \begin{pmatrix} \langle D(S) \rangle \\ \langle N(S) \rangle \\ \langle X(S) \rangle \end{pmatrix},$$

ここで,  $\mathcal{A} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \beta \\ \beta & \alpha & \beta \\ \beta & \beta & \alpha \end{pmatrix}$ ,  $\alpha = \frac{\mu+1}{(\mu-1)(\mu+2)}$ ,  $\beta = \frac{-1}{(\mu-1)(\mu+2)}$ ,  $\mu = -A^2 - A^{-2}$  である.

### 3 Proof of Theorem 1.5.

Theorem 1.5 の証明には Fig. 8 を用いる. 任意の自然数  $n$  に対して,  $K_n$  は non-classical virtual knot である.  $*$ ,  $0, 1, \dots, n-1$  とラベル付けされた交点それぞれに  $v$ -move を施すと,  $K_n$  から  $K_0', K_0, K_1, \dots, K_{n-1}$  が得られる. ここで,  $K_0'$  と  $K_0$  は trivial knot である. virtual knot  $K_0, K_1, \dots, K_n$  がすべて異なるということを f-polynomial を用いて示す.

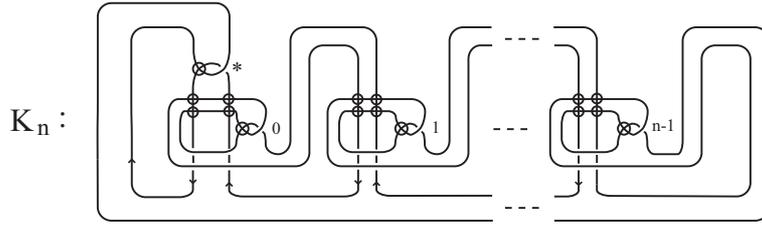


Fig. 8.

tangle  $T$  と  $S_n$  (Fig. 9, 10) を用いて,  $K_n$  を  $N(T + S)$  と考える.

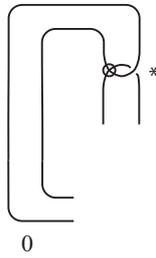


Fig. 9 :  $T$ .

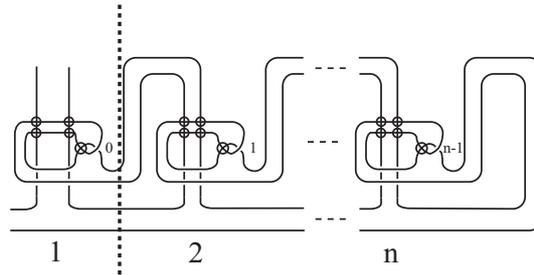


Fig. 10 :  $S_n$ .

Lemma 2.1 を用いると,  $K_n$  の Kauffman bracket polynomial は次のようになる.

$$\begin{aligned}
 \langle K_n \rangle &= \langle N(T + S_n) \rangle \\
 &= \left( \langle D(T) \rangle, \langle N(T) \rangle, \langle X(T) \rangle \right) \mathcal{A} \begin{pmatrix} \langle D(S_n) \rangle \\ \langle N(S_n) \rangle \\ \langle X(S_n) \rangle \end{pmatrix}. \quad (3)
 \end{aligned}$$

Fig. 10 の  $S_n$  から  $D(S_n)$ ,  $N(S_n)$ ,  $X(S_n)$  を考え, Fig. 10 の破線で 2 つの tangle に分け, Lemma 2.1 を繰り返し適用し, それらの Kauffman bracket polynomial  $\langle D(S_n) \rangle$ ,  $\langle N(S_n) \rangle$ ,  $\langle X(S_n) \rangle$  を計算する.

ここで,  $\mathbb{Q}[A, A^{-1}]$  に成分をもつ行列  $M$  から行列  $M_{\max}$  というものを考える.  $M$  の  $(i, j)$  成分は  $\frac{g}{f}$  であり,  $f, g \in \mathbb{Z}[A, A^{-1}]$  であるとき,  $M_{\max}$  の  $(i, j)$  成分  $\bar{m}$  は,  $g$  の最高次数から  $f$  の最高次数を引いたものが  $m$  であることを意味する. ただし,  $M$  の成分で 0 があつたとき,  $M_{\max}$  の成分として書く際には, 単に 0 と表わすことにする. このとき, Lemma 3.1 が得られる.

**Lemma 3.1.**

$$\begin{pmatrix} \langle D(S_n) \rangle \\ \langle N(S_n) \rangle \\ \langle X(S_n) \rangle \end{pmatrix}_{\max} = \begin{pmatrix} \overline{7n+2} \\ \overline{3n} \\ \overline{7n-4} \end{pmatrix}.$$

式 (3) と Lemma 3.1, そして, 必要な行列の  $M_{\max}$  を計算することにより,  $\langle K_n \rangle$  の最高次数は  $7n+3$  となる.  $K_n$  の writhe は  $n+1$  なので,  $K_n$  の f-polynomial の最高次数は  $4n$  ( $n \geq 1$ ) となる. ここで,  $K_0$  は trivial knot であり, したがって, virtual knot  $K_0, K_1, \dots, K_n$  はすべて異なることが示せた.  $p$  が表わす knot を  $K$  としたとき,  $\{K \# K_0, K \# K_1, \dots, K \# K_n\}$  を考えることにより, Theorem 1.5 が得られる.

## 参考文献

- [1] M. Hirasawa and Y. Uchida, The Gordian complex of knots, Knot Theory Ramifications 11 (3) (2002), 363-368.
- [2] L. H. Kauffman, Virtual knot theory, European. J. Combin. 20 (7) (1999), 663-691.
- [3] Y. Ohyama, The  $C_k$ -Gordian complex of knots, J. Knot Theory Ramifications 15 (1) (2006), 73-80.