

n ツイストスパン 3 葉結び目の 基本バイカンドル

芦原 聡介 (広島大学大学院理学研究科博士後期課程 1 年)

Abstract

向き付けられた曲面絡み目に対して, 基本バイカンドルという不変量が定義されている. また, 任意の曲面絡み目は, ch-ダイアグラムというマーカー付き特異絡み目ダイアグラムで表すことができ, そこから直接, 曲面絡み目の基本バイカンドルを求めることができる. 本報告では, n ツイストスパン 3 葉結び目の基本バイカンドルを, その周期的な ch-ダイアグラムから求める.

1 バイカンドルと曲面絡み目

定義 1.1 ([4]) 集合 B 上の 4 つの二項演算 $(a, b) \mapsto a^b, a_b, a^{\bar{b}}, a_{\bar{b}}$ が次の公理を満たすとき B をバイカンドルという.

1. 任意の $b \in B$ に対して, 写像 $a \mapsto a^b, a_b, a^{\bar{b}}, a_{\bar{b}}$ は全単射である.
2. 任意の $a, x, y \in B$ に対して, $x = a_x \Leftrightarrow a = x^a, y = a^{\bar{y}} \Leftrightarrow a = y_{\bar{a}}$.
3. 任意の $a, b \in B$ に対して, $a = a^{\bar{b}b_a}, b = b_{aa^{\bar{b}}}, a = a^{\bar{b}b_a}, b = b_{aa^{\bar{b}}}$.
4. 任意の $a, b, c \in B$ に対して, $a^{bc} = a^{c_b b^c}, c_{ba} = c_{a^b b_a}, (b_a)^{c_a b} = (b^c)_{a^c b}$.

定義 1.2 有向閉曲面 F の $\mathbb{R}^4$ への埋め込みの像 K を曲面絡み目という.

曲面絡み目に基本バイカンドルを定義するために, 以下の定義が必要となる.

各 $i (i = 1, \dots, 4)$ に対し, 射影 $p_i : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ を $p_i(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_4)$ とする. 射影図 $p_3(K)$ の任意の点が, 次の Figure 1 のいずれかのような近傍を持つとき, 正則射影といい, 像 $p_3(K)$ を正則射影図という.

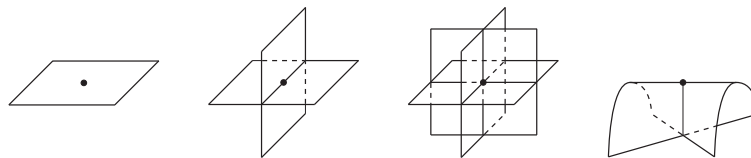


Figure 1:

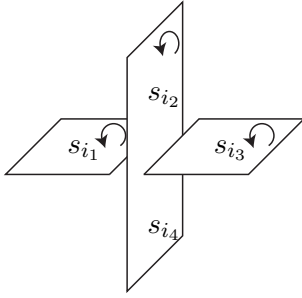
正則射影図にシートの上下の情報を入れたものを, 曲面ダイアグラムという. 曲面ダイアグラムの, 上側シートからも 2 重曲線の近傍を取り除いて得られる集合の, 各連結成分をセミシートという.

バイカンドルの表示は生成元の集合 S と関係式の集合 R からなり, $\langle S \mid R \rangle$ と表される. これは S が生成する自由バイカンドルを, R が生成する最小の合同関係で割って得られるバイカンドルである. 曲面ダイアグラム D の基本バイカンドル $BQ(D)$ を, 次のようにして定義する.

1. $s_1, \dots, s_n$ を D のセミシートする. a_i を, セミシート s_i のラベルとする. このとき生成元の集合を $S = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ とする.
2. $d_1, \dots, d_m$ を D の2重点の集合の各連結成分とする. d_i のまわりで Figure 2 のようにセミシート $s_{i_1}, s_{i_2}, s_{i_3}, s_{i_4}$ があるとき, d_i から定まる関係式2つを, $r_1(d_i) : a_{i_3} = a_{i_1}^{a_{i_2}}, r_2(d_i) : a_{i_4} = a_{i_2} a_{i_1}$ とする. このとき関係式の集合を $R = \{r_1(d_1), r_2(d_1), \dots, r_1(d_m), r_2(d_m)\}$ とする.

定義 1.3 D の基本バイカンドル $BQ(D)$ を次の表示を持つバイカンドルで定義する.

$$BQ(D) = \langle a_1, \dots, a_n \mid r_1(d_1), r_2(d_1), \dots, r_1(d_m), r_2(d_m) \rangle.$$



$$r_1(d_i) : a_{i_3} = a_{i_1}^{a_{i_2}}, r_2(d_i) : a_{i_4} = a_{i_2} a_{i_1}.$$

Figure 2: d_i の近傍

Figure 3 で表される, 曲面ダイアグラム上の7種類の変形を, ローズマン変形という. これらは, 古典絡み目のダイアグラムに対するライデマイスター移動のような役割をするものである.

定義 1.4 2つの曲面ダイアグラムが, 有限回のローズマン変形と $\mathbb{R}^3$ の全同位で移りあうとき, 同値であるという.

定理 1.5 (Roseman [5], cf. [2]) 2つの曲面絡み目が同値である為の必要十分条件は, それらの曲面ダイアグラムが同値であることである.

曲面ダイアグラムの基本バイカンドルに対して, 次のことが知られている.

定理 1.6 (Carrell [1]) D と D' を同値な曲面絡み目とする. このとき $BQ(D)$ と $BQ(D')$ は同型なバイカンドルである.

この定理により, 曲面絡み目 K の基本バイカンドルを (同型の差を除いて) ダイアグラムによらず定義することができる.

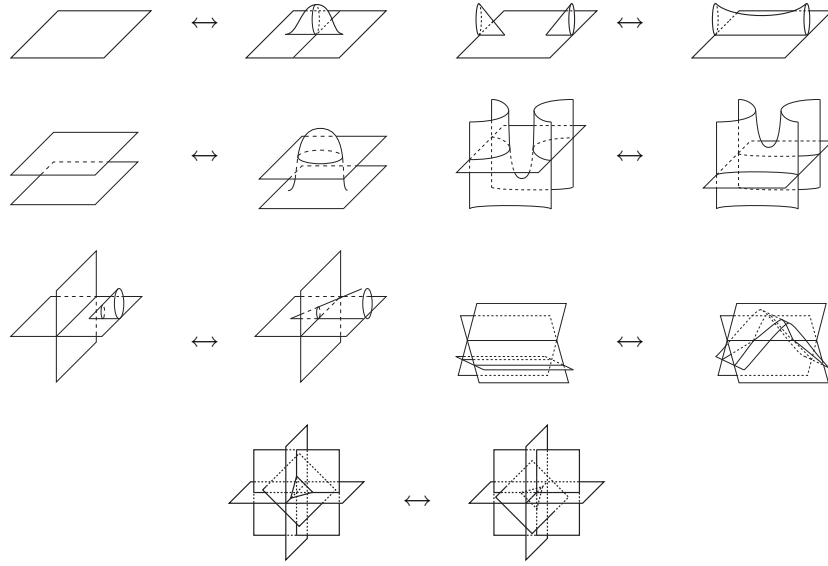


Figure 3: ローズマン変形

定義 1.7 K を曲面絡み目とし, D を K の曲面ダイアグラムとする. K の基本バイカンドル $BQ(K)$ を, バイカンドル $BQ(D)$ で定める.

基本バイカンドル $BQ(K)$ は, K の不変量である.

2 ch-ダイアグラム

特異絡み目のダイアグラムの特異点に, マーカーと呼ばれる線分を乗せて表されるダイアグラムを, ch-ダイアグラムといい Γ で表す. また, ch-ダイアグラムのマーカー付点は, 交点と見なさないものとする.

$\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ を Γ のマーカー付点の集合とする. v_i の十分近くの Γ 上に, 4 点 $v_i^1, v_i^2, v_i^3, v_i^4$ を, Figure 4 のようにとる.

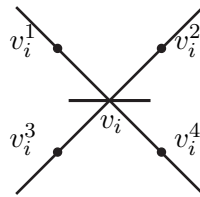


Figure 4:

絡み目ダイアグラム Γ_+ と Γ_- を次で定義する.

$$\Gamma_+ = (\Gamma_0 \setminus \bigcup_{i=1}^n (\bigcup_{j=1}^4 |v_i, v_i^j|)) \cup \bigcup_{i=1}^n (|v_i^1, v_i^2| \cup |v_i^3, v_i^4|).$$

$$\Gamma_- = (\Gamma_0 \setminus \bigcup_{i=1}^n (\bigcup_{j=1}^4 |v_i, v_i^j|)) \cup \bigcup_{i=1}^n (|v_i^1, v_i^3| \cup |v_i^2, v_i^4|).$$

Γ_+ と Γ_- は, それぞれ, Γ のマーカー付点を一斉に Figure 5-6 の様に A-smoothing, 又は, B-smoothing して得られるダイアグラムである.



Figure 5: A-smoothing



Figure 6: B-smoothing

Γ_0 を Γ からマーカーを取り除いた特異絡み目ダイアグラムとする. $L(D)$ を, D をダイアグラムに持つ $\mathbb{R}^3$ 内の (特異) 絡み目とする. $\pi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ を $\pi(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2)$ なる射影とする. w_i^j を $L(\Gamma)$ 上の $\pi(w_i^j) = v_i^j$ なる点とする. 絡み目 $L(\Gamma_+)$ と $L(\Gamma_-)$ を次で定義する.

$$L(\Gamma_+) = (L(\Gamma_0) \setminus \bigcup_{i=1}^n (\bigcup_{j=1}^4 |w_i, w_i^j|)) \cup \bigcup_{i=1}^n (|w_i^1, w_i^2| \cup |w_i^3, w_i^4|).$$

$$L(\Gamma_-) = (L(\Gamma_0) \setminus \bigcup_{i=1}^n (\bigcup_{j=1}^4 |w_i, w_i^j|)) \cup \bigcup_{i=1}^n (|w_i^1, w_i^3| \cup |w_i^2, w_i^4|).$$

定義 2.1 $L(\Gamma_+)$ と $L(\Gamma_-)$ が共に自明な絡み目であるとき, ch-ダイアグラム Γ は *adequate* であるという.

L_t^+ と L_t^- を次で定まる $\mathbb{R}^3$ 内の絡み目とする.

$$L_t^+ = (L(\Gamma_0) \setminus \bigcup_{i=1}^n (\bigcup_{j=1}^4 |w_i, (1-t)w_i + tw_i^j|)) \cup \bigcup_{i=1}^n (|(1-t)w_i + tw_i^1, (1-t)w_i + tw_i^2| \cup |(1-t)w_i + tw_i^3, (1-t)w_i + tw_i^4|).$$

$$L_t^- = (L(\Gamma_0) \setminus \bigcup_{i=1}^n (\bigcup_{j=1}^4 |w_i, (1+t)w_i - tw_i^j|)) \cup \bigcup_{i=1}^n (|(1+t)w_i - tw_i^1, (1+t)w_i - tw_i^2| \cup |(1+t)w_i - tw_i^3, (1+t)w_i - tw_i^4|).$$

Γ を adequate な ch-ダイアグラムとする. $B_1^+, \dots, B_\mu^+ \subset \mathbb{R}^3$ を $\partial(B_1^+ \cup \dots \cup B_\mu^+) = L(\Gamma_+)$ なる互いに交わらない 2 次元円板とする. $B_1^-, \dots, B_\lambda^- \subset \mathbb{R}^3$ を $\partial(B_1^- \cup \dots \cup B_\lambda^-) = L(\Gamma_-)$ なる互いに交わらない 2 次元円板とする. このとき曲面絡み目 $F(\Gamma)$ を次で定義する.

$$p_4(F(\Gamma) \cap \mathbb{R}^3 \times \{t\}) = \begin{cases} \emptyset & (t > 2). \\ B_1^+ \cup \dots \cup B_\mu^+ & (t = 2). \\ L(\Gamma_+) & (1 \leq t < 2). \\ L_t^+ & (0 < t < 1). \\ L(\Gamma_0) & (t = 0). \\ L_t^- & (-1 < t < 0). \\ L(\Gamma_-) & (-2 < t \leq -1). \\ B_1^- \cup \dots \cup B_\lambda^- & (t = -2). \\ \emptyset & (t < -2). \end{cases}$$

曲面絡み目 $F(\Gamma)$ を, ch-ダイアグラム Γ に付随する曲面絡み目という.

定義 2.2 $F(\Gamma)$ と K が同値な曲面絡み目であるとき, Γ を K の ch-ダイアグラムと呼ぶ.

定理 2.3 (Yoshikawa [6]) 任意の曲面絡み目 K に対して, K の ch-ダイアグラムが存在する.

3 ch-ダイアグラムの基本バイカンドル

Γ を向き付けられた adequate な ch-ダイアグラムとする. 次のようにして, Γ の基本バイカンドルを定義する.

1. $x_1, \dots, x_n$ を Γ から Γ の交点を取り除いた集合の各連結成分とする. b_i を集合 x_i のラベルとする. このとき生成元の集合を $S = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ とする.
2. $c_1, \dots, c_m$ を Γ の各交点とする. 交点 c_i のまわりで Figure 7 のように集合があるとき, c_i が正の交点ならば, c_i で定まる関係式 2 つを, $r_1(c_i) : b_{i_3} = b_{i_1}^{b_{i_2}}, r_2(c_i) : b_{i_4} = b_{i_2}^{b_{i_1}}$ とする. c_i が負の交点ならば, c_i で定まる関係式 2 つを, $r_1(c_i) : b_{i_1} = b_{i_3}^{b_{i_4}}, r_2(c_i) : b_{i_2} = b_{i_4}^{b_{i_3}}$ とする. このとき関係式の集合を $R = \{r_1(c_1), r_2(c_1), \dots, r_1(c_m), r_2(c_m)\}$ とする.

定義 3.1 Γ の基本バイカンドル $BQ(\Gamma)$ は次の表示を持つバイカンドルで定義される.

$$BQ(\Gamma) = \langle b_1, \dots, b_n \mid r_1(c_1), r_2(c_1), \dots, r_1(c_m), r_2(c_m) \rangle.$$

定理 3.2 K を曲面絡み目とする. Γ を K の ch-ダイアグラムとする. このとき, $BQ(K)$ と $BQ(\Gamma)$ は同型なバイカンドルである.

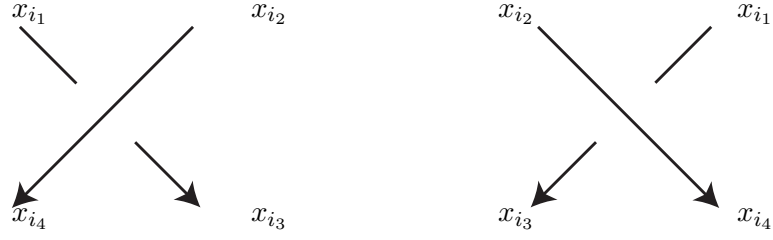


Figure 7:

4 n-ツイストスパン 3 葉結び目

$\mathbb{R}_+^3$ を $\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \mid x_3 \geq 0, x_4 = 0\}$ とする. k を古典結び目として, $T_k \subset \mathbb{R}_+^3$ を, 端点を $\mathbb{R}^2$ 上に持つ, k のタンクルとする. このとき, 集合 $\{(x_1, x_2, x_3 \sin \theta, x_3 \cos \theta) \mid (x_1, x_2, x_3) \in T_k, \theta \in [0, 2\pi)\}$ は, 曲面結び目になる. これをスパン k と呼ぶ. $\mathbb{R}_+^3$ を $\mathbb{R}^2$ の周りで 1 回転させる際に, B^3 を n ($n \in \mathbb{Z}$) 回転させると, 新たな曲面絡み目が得られる. これを n -ツイストスパン k という.

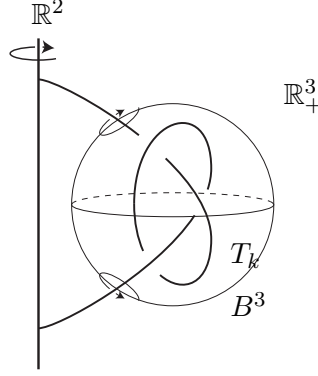


Figure 8:

定理 4.1 (cf. [3]) n -ツイストスパン 3 葉結び目は, Figure 9 で表される ch -ダイアグラム表示を持つ.

Figure 9 の ch -ダイアグラムを $\tau^n T$ とし, その向きを逆にしたものを $-\tau^n T$ とする.

定理 4.2 $\phi_1(a, b, c) = (b^{\bar{b}^{-1}})_a$, $\phi_2(a, b, c) = b^{\bar{b}^{-1}c^{\bar{b}}}$, $\phi_3(a, b, c) = b_c$, $r(a, b, c) : a^{b^{\bar{b}^{-1}}} = (c^{\bar{b}})_{b^{\bar{b}^{-1}}}$ とする.

$\tau^n T$ の基本バイカンドルは, 次の表示を持つ. $\langle a_1, b_1, c_1, \dots, a_n, b_n, c_n \mid a_{i+1} = \phi_1(a_i, b_i, c_i), b_{i+1} = \phi_2(a_i, b_i, c_i), c_{i+1} = \phi_3(a_i, b_i, c_i), r(a_i, b_i, c_i), a_1 = \phi_1(a_n, b_n, c_n), b_1 = \phi_2(a_n, b_n, c_n), c_1 = \phi_3(a_n, b_n, c_n) \rangle$.

$\psi_1(a, b, c) = (b^{b^{-1}})_{\bar{a}}$, $\psi_2(a, b, c) = b^{b^{-1}c^{\bar{b}}}$, $\psi_3(a, b, c) = b_{\bar{c}}$, $r'(a, b, c) : a^{\overline{b^{b^{-1}}}} = (c^{\bar{b}})_{b^{b^{-1}}}$ とする.

$-\tau^n T$ の基本バイカンドルは, 次の表示を持つ. $\langle a_1, b_1, c_1, \dots, a_n, b_n, c_n \mid a_{i+1} = \psi_1(a_i, b_i, c_i), b_{i+1} = \psi_2(a_i, b_i, c_i), c_{i+1} = \psi_3(a_i, b_i, c_i), r'(a_i, b_i, c_i), a_1 = \psi_1(a_n, b_n, c_n), b_1 = \psi_2(a_n, b_n, c_n), c_1 = \psi_3(a_n, b_n, c_n) \rangle$.

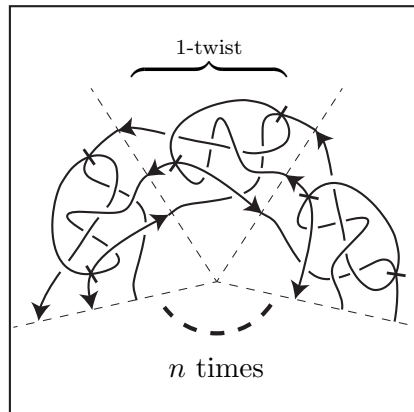


Figure 9:

References

- [1] T. Carrell, *The surface biquandle*, Pomona College, April 3, 2009.
- [2] J. S. Carter and M. Saito, *Knotted surfaces and their diagrams*, mathematical Surveys and Monographs, vol. 55, American Mathematical Society, 1998.
- [3] A. Inoue, *A symmetric motion picture of the twist spun trefoil*, arXiv:1008.2819.
- [4] L. H. Kauffman and D. E. Radford, *Bi-oriented quantum algebras, and generalized Alexander polynomial for virtual links*, Diagrammatic morphisms and applications (San Francisco, CA, 2000), 113–140, Contemp. Math., 318, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2003.
- [5] D. Roseman, *Reidemeister-type moves for surfaces in four-dimensional space*, Knot theory (Warsaw, 1995), 347–380, Banach Center Publ., Polish Acad. Sci., Warsaw, 42 (1998).
- [6] K. Yoshikawa, *An enumeration of surfaces in four-space*, Osaka J. Math. 31 (1994), 497–522.