

アレクサンダーカンドルの G 族とモジュラー不変式論

野坂 武史^{*1} (京都大学 数理解析研究所 博士課程 3 回生)

概要

本稿は、論文 [N] の概説である。 G を任意の群とする。 任意の G 加群 M は、“アレクサンダーカンドルの G 族” という代数構造を持つ。 この族のコホモロジーの 2 コサイクルが得られた時、ハンドルボディーノットの不変量が定義されている。 当論文では、この G 族の n コサイクルを、アーベル群 M の G 不変群 n コサイクルから構成するアルゴリズムを得た。 その構成はシンプルであり、不変量の計算に将来実用的だろうと期待される。 特に、表現論やモジュラー不変式論からカンドルコサイクル表示の例を多く得た。

1 導入. コサイクル不変量による動機付けと、本稿の構成

カンドルとは、或る代数系である。 その公理は結び目の不変量の構成に役立つ。 論文 [CJKLS] において、カンドルに関する (コ) ホモロジー群が導入され、さらに、その 3-コサイクルを使い、古典的結び目のカンドルコサイクル不変量が導入された ([CKS] も見よ)。 さらに、石井-岩切-大城-Jang 氏ら (以下、[IIJO] と略称させていただきます) によってカンドルコサイクル不変量は、“ハンドルボディー結び目” に拡張された。 ただし、その拡張にはいくつか条件がある: 例えば、“カンドル G 族” というクラスのカンドルの範疇内である上、さらにコサイクルには強い条件を課す必要がある。

そもそも、今迄にカンドルコサイクルの表示や、コホモロジーの計算は、一部のカンドルでしか成功していなかった。 詳述すれば、望月氏 [Moc] による有限体上のアレクサンダーカンドルか、または、PC により小さいカンドルに対してでしか成功例はなかった。

そこで本研究では、コサイクルを量産できるカンドルのクラスを広げる事に成功した。 さらに、そのコサイクルは上記の [IIJO] の強い条件を全て満たす。 そこで鍵となるのは、井上-蒲谷氏 [IK] が構成した或る鎖写像を、少し改良したものである。 カンドルコサイクルは、群コサイクルとなる不変 G 多項式を、その鎖写像に代入するだけで容易に得られる。 その不変多項式は不変式論や表現論の事実により得られ、実際、多くのカンドルコサイクルを得られた。 よって結論・収穫として、ハンドルボディー結び目のコサイクル不変量の多くが理論上計算可能になった。 筆者のコサイクルによる不変量は今後計算・研究されると期待している。

さて以上を詳説するため、本稿は以下のようにした。 節 2 では、カンドル G 族を復習する。 節 3 ではカンドル G 族のコホモロジーを復習する。 節 4 では、その鎖写像の改良版を紹介する。 節 5 では、その鎖写像からカンドルコサイクルが構成される。 節 6 では、極化を使いコサイクルが量産できることを見る。 節 7 では、モジュラー不変式論からコサイクルを 1 つ例示する。

昨年の本講演では位相的な解説を筆者は行った。 が紙幅の都合上、本稿では代数的な議論に限った。 当不変量の構成は [II] や [IIJO] を、その鎖写像の幾何的意味は [IK] をご参照ください。

2 復習: カンドルとカンドル G 族

まずカンドルから復習する。 カンドルとは、集合 X と二項演算 $\triangleleft : X^2 \rightarrow X$ の組で、 $\forall x, y, z \in X, x \triangleleft x = x, (x \triangleleft z) \triangleleft (y \triangleleft z) = (x \triangleleft y) \triangleleft z$ を満たし、 $\forall x, y \in X, \exists! w \in X, w \triangleleft x = y$ を満たすものである。 例えば、 $\mathbb{Z}[T^{\pm}]$ -加群に、二項演算を $x \triangleleft y = Tx + (1 - T)y$

^{*1} この研究は、日本学術振興会 DC2 からの補助を受けています。

と入れたものをアレクサンダーカンドルという。他の例として, 群 $X = G$ は, 二項演算 $g \triangleleft h = h^{-1}gh \in G$ によりカンドルになる。

次に [IIJO] にて導入されたカンドル G 族を復習する。 G を群とし, S を集合とする。写像 $\triangleleft^G : S^2 \times G \rightarrow S$ が与えられ時, 任意の元 $(x, y, g) \in S^2 \times G$ に対し, 値 $\triangleleft^G(x, y, g) \in S$ を $x \triangleleft^g y$ と略記する。組 $(S, G, \triangleleft^G)$ がカンドルの G 族とは, 次の3つの公理を満たす時をいう。

- $\forall g \in G$ と $\forall x \in S$ に対し, $x \triangleleft^g x = x$.
- $\forall g, h \in G$ と $\forall x, y \in S$ に対し, $x \triangleleft^{gh} y = (x \triangleleft^g y) \triangleleft^h y$ と $x \triangleleft^e y = x$.
- $\forall g, h \in G$ と $\forall x, y, z \in S$ に対し, $(x \triangleleft^g y) \triangleleft^h z = (x \triangleleft^h z) \triangleleft^{h^{-1}gh} (y \triangleleft^h z)$.

本稿の主役となる例として, 右 $\mathbb{Z}[G]$ -加群 M に対し, 写像 $\triangleleft^G : M^2 \times G \rightarrow M$ を次で定義する。

$$\triangleleft^G(x, y, g) := (x - y) \cdot g + y.$$

この組 $(M, G, \triangleleft^G)$ は, カンドル G 族となる。アレクサンダーカンドルの G 族と呼ぼう。

カンドル G 族に関し, 2, 3 注記する [IIJO]. カンドル G 族 $(S, G, \triangleleft^G)$ に対し, 直積 $S \times G$ は次の二項演算でカンドルになる:

$$(x, g) \triangleleft (y, h) := (x \triangleleft^h y, h^{-1}gh). \quad (1)$$

このカンドルを随伴カンドルという。つまり, カンドルの G 族は, カンドルの一部のクラスと見る事もできる。逆に注意することに, 任意の元 $g \in G$ に対し, 集合 $S \times \{g\}$ は $S \times G$ の部分カンドルになる。つまり随伴カンドルは, カンドルをファイバーとする族とみる事が出来, カンドルの G 族の名の由来にもなっている (cf. ファイバー束の概念)。

3 カンドルホモロジーと, [IIJO] のホモロジーの復習

ここではカンドルホモロジー [CJKLS] と, [IIJO] のホモロジーを復習する^{*2}。 X をカンドルとし, A を可換環とする。まず $C_n^R(X; A)$ を, X^n の元で生成される自由 A -加群とする。境界準同型 $\partial_n^R : C_n^R(X; A) \rightarrow C_{n-1}^R(X; A)$ を次で定義する:

$$\partial_n^R(x_1, \dots, x_n) = \sum_{2 \leq i \leq n} (-1)^i ((x_1 \triangleleft x_i, \dots, x_{i-1} \triangleleft x_i, x_{i+1}, \dots, x_n) - (x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n)).$$

すると合成 $\partial_{n-1}^R \circ \partial_n^R$ が消える事が知られる。複体 $(C_*^R(X, Y; A), \partial_*^R)$ をラック複体という。さらに加えて, 加群 $C_n^H(X; A) \subset C_n^R(X; A)$ を, ある $i \in \{1, \dots, n-1\}$ があって $x_i = x_{i+1}$ となる元 $(x_1, \dots, x_n)$ らで生成される部分加群と定義する。すると $C_n^H(X, A)$ は部分複体となる事が知られ, 我々はカンドル複体 $(C_*^Q(X; A), \partial_*^R)$ を商複体 $C_*^R(X; A)/C_*^H(X; A)$ と定義する。そのホモロジー $H_*^Q(X; A)$ をカンドルホモロジーという。双対的に, それらのコホモロジーからも定義できる: $H_R^n(X; A)$ と $H_Q^n(X; A)$ と書こう。さらに, $H_Q^n(X; A)$ の元の代表となる写像 $X^n \rightarrow A$ をカンドルコサイクルという。

次に, [IIJO] で定義された複体を復習する。まず X を随伴カンドル $S \times G$ とする。 $C_n^R(X; A)$ の部分加群 $C_*^D(X; \mathbb{Z})$ を, 次の二つの集合の元らで生成するものとする。

$$\bigcup_{2 \leq i \leq n-1} \left\{ (q_1, \dots, q_{i-1}, (a, g), (a, h), q_{i+2}, \dots, q_n) \mid q_1, \dots, q_n \in X, g, h \in G, a \in S \right\},$$

^{*2} [IIJO] では, 一般に局所系係数版で定義されているが, ここでは “primitive X -set” という局所系係数をものみを扱う。

$$\bigcup_{i=2}^n \left\{ \begin{array}{l} (q_1, \dots, q_{i-1}, (a, gh), q_{i+1}, \dots, q_n) - (q_1, \dots, q_{i-1}, (a, g), q_{i+1}, \dots, q_n) \\ \quad - (q_1 \triangleleft (a, g), \dots, q_{i-1} \triangleleft (a, g), (a, h), q_{i+1}, \dots, q_n) \end{array} \middle| \begin{array}{l} q_j \in X, \quad a \in \mathcal{S} \\ g, h \in G \end{array} \right\}.$$

すると $C_*^D(X; \mathbb{Z})$ は部分複体となる事が示されている [IIJO, Lemma 4.1]. さらに, それによる商複体 $C_*^R(X; \mathbb{Z})/C_*^D(X; \mathbb{Z})$ をおき, またそのホモロジーを $H_*^{\text{Gf}}(X; A)$ と書く事にする. またそのコホモロジー $H_{\text{Gf}}^n(X; A)$ の元の代表となる写像 $X^n \rightarrow A$ を G 族のカンドルコサイクルと呼ぶ事にする.

最後に本研究の動機を述べれば, [IIJO] によると, そのような 3-コサイクルが得られると, ハンドルボディーノットの不変量が得られる事が知られている. よってコサイクルを得る容易なアルゴリズムが懇願されていた. しかし条件が複雑な為, 悲観視されていたと思われる.

4 G 不変な群コサイクルからカンドルコサイクル

さて, 本稿では, カンドルコサイクルを得る為に, アレクサンダーカンドルの G 族のみに焦点に絞って議論していく. そこで記号を以下のように統一する.

本稿での記号 G を群とし, $\mathbb{Z}[G]$ をその群環とし, M を右 $\mathbb{Z}[G]$ -加群とする. さらに $M \times G$ 上の随伴カンドルを, X と書く事にする (定義は (1) を見よ). A を単位元つき可換環とする.

さて今から, ある鎖写像を構成していく (当論文の鍵である). この写像の構成は井上-蒲谷氏らの構成を踏襲している (詳細は注意 4.4 を見よ). この定義域はラック複体 $C_n^R(X; \mathbb{Z})$ であり, その値域は上記の余不変 $C_n^{\text{gr}}(M; \mathbb{Z})_G$ である. そこで夫々を以下復習しよう.

まず, 非斉次鎖群の G -余不変を復習する ([Bro, §II.2] を見よ). G 加群 M をアーベル群で G 作用付きとみなそう. そこで加群 $C_n^{\text{gr}}(M; \mathbb{Z})$ を, 元 $(a_1, \dots, a_n) \in M^n$ を基底とする自由加群とし, その境界準同型 $\partial_n^{\text{gr}}(a_1, \dots, a_n) \in C_{n-1}^{\text{gr}}(M; \mathbb{Z})$ を

$$(a_2, \dots, a_n) + \sum_{1 \leq i \leq n-1} (-1)^i (a_1, \dots, a_{i-1}, a_i + a_{i+1}, a_{i+2}, \dots, a_n) + (-1)^n (a_1, \dots, a_{n-1}).$$

で定義する. 次に, G の $C_*^{\text{gr}}(M; \mathbb{Z})$ への対角的作用により, その G -余不変 $C_n^{\text{gr}}(M; \mathbb{Z})_G$ を $C_n^{\text{gr}}(M; \mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}[G]} \mathbb{Z}$ と定義する. 以下, そのホモロジーを $H_n^{\text{gr}}(M; \mathbb{Z})_G$ と書こう.

次に, 正規化について議論する. $C_n^{\text{gr}}(M; \mathbb{Z})_G$ の部分複体 $C_n^{\text{N}}(M; \mathbb{Z})_G$ を, 次の元で生成される部分加群として定義する:

$$\bigcup_{1 \leq i \leq n-1} \{(a_1, \dots, a_{i-1}, 0, a_{i+1}, \dots, a_n) \in M^n\}.$$

[Bro, §I.5] 等で知られる事に, 自然な射影 $C_*^{\text{gr}}(M; \mathbb{Z})_G \rightarrow C_*^{\text{gr}}(M; \mathbb{Z})_G / C_*^{\text{N}}(M; \mathbb{Z})_G$ は, それらのホモロジー間で同型を誘導する. そこで, 後者のコホモロジー $H_{\text{nor}}^n(M; A)^G$ の元の代表元となる G 不変なコサイクル $\kappa: M^n \rightarrow A$ のことを, 正規化された群コサイクルという.

さて, 目標の鎖写像を具体的に構成するが, まず次の添え字の集合を用意しておこう:

$$\mathcal{K}_n := \{\mathbb{k}_n = (k_1, \dots, k_n) \in \{0, 1\}^n \mid k_1 = 0\}.$$

この位数は 2^{n-1} である. またその元 $\mathbb{k}_n \in \mathcal{K}_n$ に対し, 記号 $|\mathbb{k}_n| \in \mathbb{Z}$ を $k_1 + \dots + k_n$ とする. また元 $\vec{g} = (g_1, \dots, g_n) \in G^n$ に対し, 次を定義する:

$$\vec{g}_{\mathbb{k}_n, i} := g_{i+1}^{k_{i+1}} g_{i+2}^{k_{i+2}} \cdots g_n^{k_n} \in G \quad \text{for } i \leq n-1.$$

すると、目標である写像を筆者は次で定義した: 即ち, $\varphi_n(a_1, g_1, \dots, a_n, g_n) :=$

$$\sum_{\mathbf{k}_n=(k_1, \dots, k_n) \in \mathcal{K}_n} (-1)^{|\mathbf{k}_n|} ((a_1 - a_2) \cdot \vec{g}_{\mathbf{k}_n, 1}, (a_2 - a_3) \cdot \vec{g}_{\mathbf{k}_n, 2}, \dots, (a_{n-1} - a_n) \cdot \vec{g}_{\mathbf{k}_n, n-1}, a_n) \in C_n^{\text{gr}}(M; \mathbb{Z})_G.$$

ここで $(g_i, a_i) \in G \times M$. 例えば, $n = 2$ または $n = 3$ の時, その写像 φ_n は次の様に, 記される:

$$\varphi_2(a, f, b, g) = (a - b, b) - ((a - b) \cdot g, b), \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \varphi_3(a, f, b, g, b, c, h) &= (a - b, b - c, c) - ((a - b) \cdot g, b - c, c) \\ &\quad - ((a - b) \cdot h, (b - c) \cdot h, c) + ((a - b) \cdot (gh), (b - c) \cdot h, c). \end{aligned}$$

すると次の定理が本稿の要 (かなめ) である.

定理 4.1. G を任意の群とし, M を右 $\mathbb{Z}[G]$ -加群とし, X を随伴カンドル $M \times G$ とする. この時, 写像 $\varphi_n : C_n^R(X; \mathbb{Z}) \rightarrow C_n^{\text{gr}}(M; \mathbb{Z})_G$ は鎖写像である. さらに上記の部分加群らに関し, $\varphi_n(C_n^H(X; \mathbb{Z})) \subset \varphi_n(C_n^D(X; \mathbb{Z})) \subset C_n^N(M; \mathbb{Z})_G$ となる.

これは初等的計算で直に示される ([N, 付録] を見よ). この帰結として次の系を即座に得る:

系 4.2. 鎖写像 φ_n は, 準同型 $\varphi_n^* : H_{\text{gr}}^n(M; A)^G \rightarrow H_Q^n(X; A)$ を誘導し, それは分解 $H_{\text{gr}}^n(M; A)_G \rightarrow H_{\text{Gf}}^n(X; A) \rightarrow H_Q^n(X; A)$ をもつ. 特に, 正規化された群コサイクル $\theta : M^n \rightarrow A$ に対し, $\varphi_n^*(\theta)$ はカンドルコサイクルでもあり, G 族のコサイクルでもある.

この系は, 懐の広い内容を秘めていると筆者は考えており, それを幾つか注意する:

注意 4.3. (G 族のコサイクルに関する今までの試み)

石井-岩切氏 [II] らによる G が可換群の場合の試みと, 系 4.2 と比較する. 実際, 或る条件を満たすカンドルコサイクルから, G 族のコサイクルを構成する一案を提起していた. しかし系 4.2 は, 非可換の場合にも通用し, さらにそのカンドルコサイクルは, G 族の条件を必ず満たすという強力な主張である. それも任意の G 加群 M に成立するため, 適応性が広いと考える.

注意 4.4. ([IK] での鎖写像との比較) ここで我々の鎖写像 φ_n と [IK] での鎖写像との比較をする. まず [IK, §3] において, 任意のカンドル Q に対し, 鎖写像 φ_{IK} が, 上記のラック複体から “simplicial 複体 $C_n^\Delta(Q; \mathbb{Z})$ ” へのものとして定義された. しかし, シャッフル積を使った上, 写像の値域が良く解らない点がネックであった. ただし, 彼らの動機であった (相対) チャーン-サイモンズ類を理解するには十分であったのだが・・・

本題に戻り, Q を随伴カンドル $M \times G$ とする. すると, ある自然な全射 $\pi : C_n^\Delta(X; \mathbb{Z}) \rightarrow C_n^{\text{gr}}(M; \mathbb{Z})_G$ があり, さらに合成 $\pi \circ \varphi_{\text{IK}}$ は, 上記の鎖写像 φ_n と一致する事が解る. 要するに, 定理 4.1 の云わんとする利点は, 合成 $\pi \circ \varphi_{\text{IK}}$ が鎖写像であり, さらに, 全射 π で落とす事で, 鎖写像の値域をわかり易いものに簡易化されたという事である.

注意 4.5. (誘導射 φ_n^* の同型性と, 望月拓郎氏 [Moc] の結果の比較)

系 4.2 の誘導射 $\varphi_n^* : H_{\text{gr}}^n(M; A)^G \rightarrow H_Q^n(X; A)$ が同型にどれほど近いかは, 問題である. 勿論, 自明射である可能性はある. しかし今後, もし筆者の発見したコサイクルに関する不変量が非自明ならば, その誘導射は非自明でない事が解る事になる. 将来そうなる事を期待している.

しかしながら, 簡単な場合, 望月氏の [Moc] の結果から同型性が観察できる. M を有限体 $\mathbb{F}_q$ とし, $G = \mathbb{Z}$ とし, 作用を $\omega \in \mathbb{F}_q^*$ 倍として定義された場合を考えよう. この場合の $H_Q^3(X; A)$

は計算されている. この計算結果から解る事は, その誘導射 φ_3^* は同型に近く, そしてその Coker も解っている. 即ち, [Moc] に記述される Coker となる元である $\Gamma(q_1, q_2, q_3, q_4)$ と書かれたコサイクル以外は全て φ_3^* から導かれる^{*3}. が一般の G, M に関し, その鎖写像はまだ未知である.

5 G 不変多重線形写像から, カンドルコサイクルへ

さて, 系 4.2 により, カンドルコサイクルを例示するには, G 不変な群コサイクルを見つければよい. ここで留記する事に, 写像 $f: M^n \rightarrow A$ が G 不変なコサイクルに成る条件は, 定義より次の二つの条件式を満たす事と同値である:

$$0 = f(a_2, \dots, a_{n+1}) + \sum_{1 \leq i \leq n} (-1)^i f(a_1, \dots, a_{i-1}, a_i + a_{i+1}, a_{i+2}, \dots, a_{n+1}) + (-1)^n f(a_1, \dots, a_n),$$

$$f(a_1, \dots, a_n) = f(a_1 \cdot g, \dots, a_n \cdot g), \quad \text{for any } (a_1, \dots, a_n) \in M^n, g \in G.$$

この条件式を満たす典型的な例は, G 不変多重線形写像である: 即ち

定理 5.1. G -不変 A -多重線形写像 $f: M^n \rightarrow A$ は, 正規化された G -不変群 n -コサイクルである. よって, 引戻し $\varphi_n^*(f)$ は, カンドル X のカンドル n -コサイクルである. 特に, $n = 3$ では, そのカンドル 3 コサイクル $\phi_f \in C_Q^3(X; A)$ は次で表示される:

$$\phi_f((a_1, g_1), (a_2, g_2), (a_3, g_3)) = f((a_1 - a_2) \cdot (1 - g_2), a_2 - a_3, a_3 \cdot (1 - g_3^{-1})), \quad (3)$$

ここで $a_1, a_2, a_3 \in M$ であり $g_1, g_2, g_3 \in G$ である.

これにより, たくさんのカンドルコサイクルを得る事が出来る. 例えば, 対称群の表現論から, その多重線形写像が得られる (例えば [岩堀, 節 5.4 とその演習問題] 参照)

例 5.2. A を任意の環とする. M を n 個直和 $A^{\oplus n}$ とし, $G = SL(n; A)$ が M への自然に作用させる. すると行列式 $\det: M^{\oplus n} \rightarrow A$ は, $SL(n; A)$ -不変 A -多重線形写像である. 特に $n = 3$ の時, 次のカンドル 3-コサイクル $\phi \in C_Q^3(X; A)$ が得られた:

$$\phi((v_1, g_1), (v_2, g_2), (v_3, g_3)) := \det((v_1 - v_2) \cdot (1 - g_2), v_2 - v_3, v_3 \cdot (1 - g_3^{-1})). \quad (4)$$

例 5.3. 一般行列群 $G := GL(n; A)$ を, 行列環 $M := \text{Mat}(n \times n; A)$ に共役で作用させる. そこで, よく知られた G -不変多重線形写像を二つ用意する. つまり $c_3: M^3 \rightarrow A$ を $c_3(S_1, S_2, S_3) = \text{Tr}(S_1 S_2 S_3)$ と定義し, $c_2: M^2 \rightarrow A$ を $c_2(S_1, S_2) = \text{Tr}(S_1 S_2)$ と定義する, ここで $S_i \in M$ である. すると, 次のカンドルコサイクル $c'_3, c'_2 \in C_Q^*(X; A)$ が表示付で得られる:

$$c'_3((S_1, g_1), (S_2, g_2), (S_3, g_3)) := \text{Tr}((S_1 - S_2 - g_2^{-1} S_1 g_2 + g_2^{-1} S_2 g_2)(S_2 - S_3)(S_3 - g_3 S_3 g_3^{-1})),$$

$$c'_2((S_1, g_1), (S_2, g_2)) := \text{Tr}((S_1 - S_2)(S_2 - g_2 S_2 g_2^{-1})), \quad \text{for } S_i \in M, g_i \in G.$$

この例は, チャーン-ヴェイユ理論によるチャーン類の構成であり, 今後の発展が期待される.

^{*3} 因みに, カンドルの中心拡大を使い, 写像 φ_3^* を持ち上げ, 同型にするようには出来た ([N2] を見よ). 一般の G, M の場合は今後の課題であるが...

6 極化を使った不変多項式からのカンドルコサイクル

まず, 不変多項式から多重線形写像を得る極化 (polarization) という古典的な手法を紹介する ([CW, §1.9] 参照). この節では新しい事柄はない. まず, V を有限体 $\mathbb{F}_q$ 上ベクトル空間とし, 表現 $\rho: G \rightarrow GL(V)$ を固定する. そこで $(\dim_{\mathbb{F}_q} V)$ -変数可換多項式環 $\mathbb{F}_q[V]$ をおく. そこで $\mathbb{F}_q[V]_d$ を, d 次の斉次多項式の貼る部分空間と書く. さらに, 添え字 $(\lambda_1, \dots, \lambda_m) \in \mathbb{N}^m$ に対し, 次で定義される $\mathbb{F}_q[V^{\oplus m}] = \mathbb{F}_q[V]^{\otimes m}$ の部分空間を考える

$$\mathbb{F}_q[V^{\oplus m}]_{(\lambda_1, \dots, \lambda_m)} := \mathbb{F}_q[V]_{\lambda_1} \otimes \mathbb{F}_q[V]_{\lambda_2} \otimes \cdots \otimes \mathbb{F}_q[V]_{\lambda_m},$$

ただし, ここで記号 $\otimes$ は対称テンソルを意味するとした. そこで射影 $\pi_{(\lambda_1, \dots, \lambda_m)}: \mathbb{F}_q[V^{\oplus m}] \rightarrow \mathbb{F}_q[V^{\oplus m}]_{(\lambda_1, \dots, \lambda_m)}$ をおく. 上記の作用 $G \curvearrowright V$ で, 記号 $\mathbb{F}_q[V]_d^G$ を $\mathbb{F}_q[V]_d$ の d 次 G -不変空間とする. そして, その元 $f \in \mathbb{F}_q[V]_d^G$ に対し, $f(v_1 + \cdots + v_d) \in \mathbb{F}_q[V^{\oplus d}]$ と表される d 次多項式を考える, ここで $(v_1, \dots, v_d) \in V^{\oplus d}$ とした. すると極化は次で定義される

$$\mathcal{P}(f) := \pi_{(1, \dots, 1)}(f(v_1 + \cdots + v_d)) \in \mathbb{F}_q[V^{\oplus d}]_{(1, \dots, 1)}.$$

定義から, 極化 $\mathcal{P}(f)$ は G -不変 $\mathbb{F}_q$ -多重線形写像である. 纏めると

補題 6.1. G -不変な d 次多項式 $f \in \mathbb{F}_q[V]_d^G$ に対し, その極化 $\mathcal{P}(f): V^{\oplus d} \rightarrow \mathbb{F}_q$ は G -不変 $\mathbb{F}_q$ -多重線形写像である.

極化を使う事で, 次の事実に基づけば, G -不変 $\mathbb{F}_q$ -多重線形写像がたくさん得られる.

例 6.2 (チャーン-ヴェイユ理論の類似). G を A 上アフィン代数群スキームとし, $\mathfrak{g}$ をそれに随伴するリー代数とする. 随伴作用 $G \curvearrowright \mathfrak{g}$ に基づいて, その不変部分 $A[\mathfrak{g}]^G$ はそこそこ研究されている. 例えば, $G = GL(n; \mathbb{F}_q)$ 又は $O(n; \mathbb{F}_q)$ の場合, 多項式 $\det(I_n t - B) \in \mathbb{F}_q[\mathfrak{g}][t]$ の i 次の係数は, G 不変多重線形写像である, ここで $B \in \mathfrak{g}$ とおいた. この線形写像はチャーン, ポントリャーギン, オイラー類と関係する事が知られている.

例 6.3 (Dickson 定理から). また幸運な事に, 幾つかの表現 $\rho: G \rightarrow GL(V; \mathbb{F}_q)$ に対し, それらの G -不変部分 $\mathbb{F}_q[V]_d^G$ は決定されている ([CW] など参照). 例えば, $G = GL(V; \mathbb{F}_q)$ とし $\rho = \text{id}$ の時, Dickson の定理から, その G -不変多項式環 $\mathbb{F}_q[\mathfrak{g}]^G$ は “Dickson 多項式” により生成される. それらはオービットチャーン類やオイラー類との関連も知られる.

注意 6.4. 定義から, $\forall v \in V$ に対し $\mathcal{P}(f)(v, \dots, v) = d^d f(v)$ である. よって, 極化 $\mathcal{P}: \mathbb{F}_q[V]_d \rightarrow \mathbb{F}_q[V^{\oplus d}]_{(1, \dots, 1)}$ は一般に全射でない (cf. 例 5.2).

7 標準表現 $SL(2; \mathbb{F}_p) \curvearrowright \mathbb{F}_q \oplus \mathbb{F}_q$ からのカンドルコサイクル

注 6.4 で指摘したよう, 極化により全ての G 不変な群コサイクルは取り出せない. さらに, 正標数での不変式論は非常に複雑でよくわかっていない. 例えば, 最近出版された本 [CSW] などはいい参考文献であり, 難しさが解ると思う. G が巡回群の場合だけに難しい現状である.

しかし, モジュラー不変式論の既存の事実に頼ることで, 我々は多くの群コサイクルを得られる. 是節では一例を紹介する. まず有限体の拡大 $\mathbb{F}_p \subset \mathbb{F}_q$ を固定する. $q = p^m$ とする. そこで標準表現 $SL(2; \mathbb{F}_p) \curvearrowright V := \mathbb{F}_q \oplus \mathbb{F}_q$ を考える. そして $M = V$ としよう.

実は, 幸運な事に最近, $\forall n \in \mathbb{Z}$ に対し, 不変式環 $\mathbb{F}_q[V^{\oplus n}]^{SL(2; \mathbb{F}_p)}$ の “ 最小生成系 ” を決定された (論文 [CSW] を見よ). ただその生成元は表示が複雑である. 実際, 標数にも依るうえ組合せ的なため, 厳密にここでは詳述しない. が, その結果を使えば G -不変多重線形射像 $V \times \cdots \times V \xrightarrow{\theta} \mathbb{F}_q$ が全てわかる. そこで次の G 族のカンドル 3 コサイクルを得た.

系 7.1. 整数 $0 \leq s, t < m$ に対し, 次の写像 $\theta : (V \times G)^3 \rightarrow \mathbb{F}_q$ は G 族の 3 コサイクルである.

$$\theta(v_1, f, v_2, g, v_3, h) :=$$

$$\begin{aligned} & (|(v_1 - v_3)^{p^s}, v_3^{p^t}|^p - |(v_1 - v_2)^{p^s} \cdot g + (v_2 - v_3)^{p^s}, v_3^{p^t}|^p - |(v_1 - v_3)^{p^s}, v_3^{p^t} \cdot h^{-1}|^p \\ & - |(v_1 - v_2)^{p^s}, v_2^{p^t}|^p + |(v_1 - v_2)^{p^s} \cdot g, v_2^{p^t}|^p + |(v_1 - v_2)^{p^s}, (v_2 - v_3)^{p^t} + v_3^{p^t} \cdot h^{-1}|^p \\ & + |(v_1 - v_2)^{p^s} \cdot g + (v_2 - v_3)^{p^s}, v_3^{p^t} \cdot h^{-1}|^p - |(v_1 - v_2)^{p^s} \cdot g, (v_2 - v_3)^{p^t} + v_3^{p^t} \cdot h^{-1}|^p) / p. \end{aligned}$$

このコサイクルは, (一番有用そうな) 標準表現に対し筆者がみつけた唯一の例である. チャーン類との関連もあるそうで, このコサイクルの今後の応用を期待している.

8 最後に・・・自明係数の時のコサイクルについて一言

今迄は primitive X -set に対するコサイクルの範疇で話を進めていた [footnote 2 を見よ]. 他方, 自明係数のコサイクルでも同様の議論は, ある程度, 平行に展開される. しかし少々障害がある. 実際 G のアーベル化が消えた場合よいものは得られない. 詳細は論文 [N] をご覧下さい.

参考文献

- [岩堀] 岩堀長慶, 対称群と一般線型群の表現論, 岩波講座 基礎数学
- [Bro] K. S. Brown, *Cohomology of Groups*, Graduate Texts in Mathematics, **87**, Springer-Verlag, New York, 1994.
- [CKS] J. S. Carter, S. Kamada, M. Saito, *Geometric interpretations of quandle homology*, J. Knot Theory Ramifications **10** (2001) 345–386.
- [CJKLS] J. S. Carter, D. Jelsovsky, S. Kamada, L. Langford, M. Saito, *Quandle cohomology and state-sum invariants of knotted curves and surfaces*, Trans. Amer. Math. Soc. **355** (2003) 3947–3989.
- [CW] H. E. A. Campbell, D. L. Wehlau, *Modular Invariant Theory*, Encyclopaedia of Mathematical Sciences, 2011, Volume **139**, Invariant Theory and Algebraic Transformation Groups, Springer-Verlag.
- [CSW] H. E. A. Campbell, R. J. Shank, D. L. Wehlau, *Vector invariants for the two dimensional modular representation of a cyclic group of prime order*, Advances in Mathematics **225** (2010) no. 2, 1069–1094.
- [II] A. Ishii, M. Iwakiri, *Quandle cocycle invariants for spatial graphs and knotted handlebodies*, to appear in Canad. J. Math.
- [IIJO] ———, Y. Jang, K. Oshiro, *A G -family of quandles and handlebody-knots*, in preparation.
- [IK] A. Inoue, Y. Kabaya, *Quandle homology and complex volume*, arXiv:math/1012.2923.
- [Moc] T. Mochizuki, *The 3-cocycles of the Alexander quandles $\mathbb{F}_q[T]/(T - \omega)$* , Algebraic and Geometric Topology. **5** (2005) 183–205.
- [N] T. Nosaka, *Quandle cocycles from invariant theory*, preprint
- [N2] ———, *Quandle cocycle invariants of knots using Mochizuki’s 3-cocycles and Dijkgraaf-Witten invariants of 3-manifolds*, preprint, arXiv:1103.3839.

E-mail address: nosaka@kurims.kyoto-u.ac.jp